Пример решения задачи:
тройной интеграл для вычисления момента инерции тела

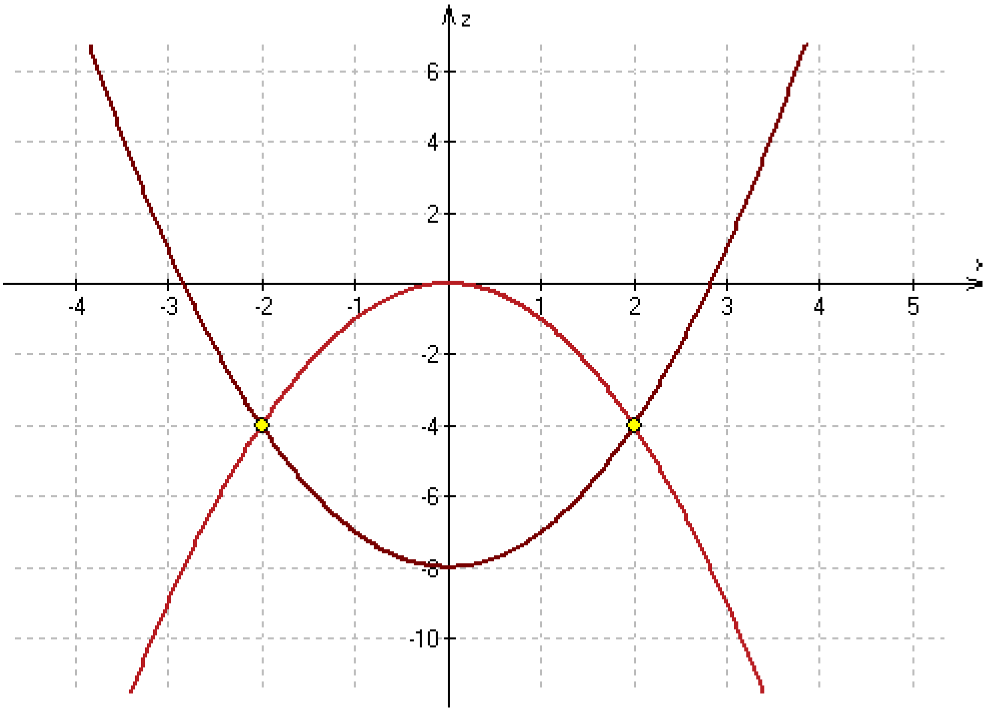
ЗАДАНИЕ.

Найти момент инерции относительно оси Oz тела, ограниченного заданными поверхностями.

$z = -x^2 - y^2, \; z = x^2 + y^2 - 8$

РЕШЕНИЕ.

Данное тело есть тело вращения, ограниченное двумя параболоидами сверху и снизу. Начертим проекцию тела (разрез):



Ясно, что проекция тела на плоскость xOy - это круг радиуса $R = 2$ (область D).

Момент инерции тела относительно оси Oz вычисляется по формуле:

$$I_z = \iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right) dxdydz = \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right) dxdy \int\limits_{x^2+y^2-8}^{-x^2-y^2} dz = \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\left(-x^2-y^2-x^2-y^2+8\right) dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\left(-2x^2-2y^2+8\right) dxdy = -2\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2-4\right) dxdy =$$

Перейдем к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Тогда $dxdy = rdrd\varphi$, $r^2 = x^2+y^2$.

$D: 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 2$.

Получаем:

$$= -2\iint\limits_D r^2\left(r^2-4\right) rdrd\varphi = -2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(r^5-4r^3\right) dr = -2\,\varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{6}r^6 - r^4\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= -2\cdot 2\pi\left(\frac{1}{6}2^6 - 2^4\right) = \frac{64}{3}\pi.$$