Задача с решением по численным методам
Тема: решение систем линейных уравнений методом простой итерации

Задание.

1) Решите систему линейных уравнений методом "Простой итерации" с точностью 0,001, предварительно оценив число достаточных для этого итераций:

$$\|X - X^k\| \le \frac{\|A\|^{k+1}}{1 - \|A\|} \cdot \|F\| \le \varepsilon,$$

где $\|A\| = max\{\sum_i |a_{1i}|;\ \sum_i |a_{2i}|; \sum_i |a_{3i}|; \sum_i |a_{4i}|\}, \|F\| = max\{|b_i|\}$.

2) Полученное решение используйте для вычисления невязки каждого уравнения.

3) Все полученные приближения решения системы привести в итоговом отчете.

4) Не забываем начинать отчет с формулировки задания.

$$\begin{cases} 0.32x_1 - 0.18x_2 + 0.02x_3 + 0.21x_4 = 1.83 \\ 0.16x_1 + 0.12x_2 - 0.14x_3 + 0.27x_4 = -0.65 \\ 0.37x_1 + 0.27x_2 - 0.02x_3 - 0.24x_4 = 2.23 \\ 0.12x_1 + 0.21x_2 - 0.18x_3 + 0.25x_4 = -1.13 \end{cases}$$

Решение.

Для обеспечения сходимости необходимо добиться выполнения условия диагонального преобладания элементов матрицы (модули диагональных коэффициентов в каждом уравнении системы больше суммы модулей недиагональных коэффициентов).
Преобразуем исходную матрицу, используя линейные комбинации строк:

0,69	0,09	0	-0,03	4,06
0,17	0,66	-0,22	-0,2	-0,73
0,00012	0,00003	0,00402	0,00011	-0,03751
0,09	-0,06	0,3	-0,76	4,01

Приведем систему к виду $x = A' \cdot x + b$. Получим:

$A' =$	0,000000	-0,130435	0,000000	0,043478	$F' =$	5,884058
	-0,257576	0,000000	0,333333	0,303030		-1,106061
	-0,029851	-0,007463	0,000000	-0,027363		-9,330846
	0,118421	-0,078947	0,394737	0,000000		-5,276316

Найдем норму матрицы A и вектора F:

$$\|A'\| = \max\{0.173913; 0.893939; 0.064677; 0.592105\} = 0.893939 < 1$$

Сходимость обеспечена.

$$\|F'\| = \max\{5.884058; 1.106061; 9.330846; 5.276316\} = 9.330846$$

Оценим число итераций, необходимых для получения точности $\varepsilon = 0.001$

$$\frac{0.893939^{k+1}}{1 - 0.893939} \cdot 9.330846 \le 0.001;$$

$$k \ge 95$$

В качестве начального приближения примем столбец F'. Последующие приближения к решению получаются по реккурентной формуле

$$x^{(k+1)} = A'x^{(k)} + F'$$

В качестве критерия остановки выберем условие $\max\left\{\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right|\right\} < 0.001$.

k	0	1	2	3	4	5	6

$x_1^{(k)}$	5,884058	5,798922	6,484798	6,618061	6,625559	6,623490	6,623797
$x_2^{(k)}$	-1,106061	-7,330817	-8,195077	-8,185858	-8,168527	-8,172294	-8,173204
$x_3^{(k)}$	-9,330846	-9,353858	-9,225535	-9,252481	-9,262004	-9,262478	-9,262272
$x_4^{(k)}$	-5,276316	-8,175427	-7,703165	-7,503058	-7,498641	-7,502881	-7,503015
$\Delta_1^{(k)}$		0,085136	0,685876	0,133263	0,007498	0,002069	0,000307
$\Delta_2^{(k)}$		6,224756	0,864261	0,009219	0,017331	0,003767	0,000910
$\Delta_3^{(k)}$		0,023013	0,128324	0,026947	0,009522	0,000474	0,000206
$\Delta_4^{(k)}$		2,899112	0,472262	0,200107	0,004416	0,004239	0,000135
$\max\left\{\Delta_i^{(k)}\right\}$		6,224756	0,864261	0,200107	0,017331	0,004239	0,000910

Итак, требуемая точность достигнута, приближенное решение:

$$x \approx \begin{pmatrix} 6.6238 \\ -8.1732 \\ -9.2623 \\ -7.5030 \end{pmatrix}$$

Вычислим невязки:

$$r = F - Ax = \begin{pmatrix} 1.83 \\ -0.65 \\ 2.23 \\ -1.13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.32 & -0.18 & 0.02 & 0.21 \\ 0.16 & 0.12 & -0.14 & 0.27 \\ 0.37 & 0.27 & -0.02 & -0.24 \\ 0.12 & 0.21 & -0.18 & 0.25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6.6238 \\ -8.1732 \\ -9.2623 \\ -7.5030 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000087 \\ 0.000073 \\ -0.000009 \\ 0.000062 \end{pmatrix}$$

Ответ.

$$x \approx \begin{pmatrix} 6.6238 \\ -8.1732 \\ -9.2623 \\ -7.5030 \end{pmatrix}; \quad r = \begin{pmatrix} 0.000087 \\ 0.000073 \\ -0.000009 \\ 0.000062 \end{pmatrix}$$