

**Тема: Дифференциальные уравнения**

**ЗАДАНИЕ.** Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью 5 м/сек. На полном ходу ее мотор выключается и через 40 сек после этого скорость лодки уменьшается до 2 м/сек. Определить скорость лодки через 2 минуты после остановки мотора, считая, что сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки.

**РЕШЕНИЕ.** Пусть  $t$  — время,  $v(t)$  — скорость лодки. На движущуюся лодку действует сила  $F = kv$ , где  $k$  — коэффициент пропорциональности. С другой стороны, по закону Ньютона сила равна произведению массы на ускорение, то есть  $F = mv'$ . Следовательно, получаем следующее дифференциальное уравнение

$$mv' = -kv, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt,$$

интегрируя его, получаем общее решение

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

Постоянную  $C$  определим из условия  $v(0) = 5$  м/сек. Получаем

$$v(0) = Ce^0 = 5, \quad C = 5.$$

Таким образом, изменение скорости в зависимости от времени определяется формулой

$$v = 5e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Определим неизвестный коэффициент  $k/m$  из условия  $v(40) = 2$ , то есть

$$v(40) = 5e^{-\frac{k}{m}40} = 2, \quad e^{-\frac{k}{m}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{1/40}, \quad v = 5 \left[ \left(\frac{2}{5}\right)^{1/40} \right]^t.$$

Из последней формулы найдем скорость лодки через 2 минуты = 120 секунд:

$$v = 5 \left[ \left(\frac{2}{5}\right)^{1/40} \right]^{120} = 5 \left(\frac{2}{5}\right)^3 = 0,32 \text{ м/сек.}$$

**ОТВЕТ:** 0,32 м/сек.