

Тема: Дифференциальные уравнения

ЗАДАНИЕ. Решить уравнение $y^2 y' - 2xy' + 2y^2 - x^2 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Разрешаем уравнение относительно y' :

$$y' = \frac{x \pm \sqrt{2}\sqrt{x^2 - y^2}}{y}.$$

Интегрируем эти уравнения:

$$y dy = (x \pm \sqrt{2}\sqrt{x^2 - y^2}) dx, \quad \frac{x dx - y dy}{\pm \sqrt{x^2 - y^2}} = \sqrt{2} dx,$$

$$\mp \sqrt{x^2 - y^2} = \sqrt{2}x + C, \quad x^2 - y^2 = (\sqrt{2}x + C)^2,$$

откуда

$$(x + C\sqrt{2})^2 + y^2 = C^2.$$

Это общий интеграл уравнения, он представляет собой семейство окружностей. Особыми решениями являются прямые $y = x$ и $y = -x$ (были потеряны при делении на $y^2 - x^2$).