Тема: Графический метод решения задачи линейного программирования

ЗАДАНИЕ. *Решить задачу графическим методом*

$$x-2y \to \min, \max$$

$$\begin{cases} 5x+3y \ge 30, \\ x-y \le 3, \\ -3x+5y \le 15, \end{cases}$$

$$x \ge 0, \quad y \ge 0.$$

РЕШЕНИЕ. Построим область допустимых решений задачи, ограниченную неравенствами

$$\begin{cases} 5x+3y \ge 30, \\ x-y \le 3, \\ -3x+5y \le 15, \end{cases}$$

$$x \ge 0, \quad y \ge 0.$$

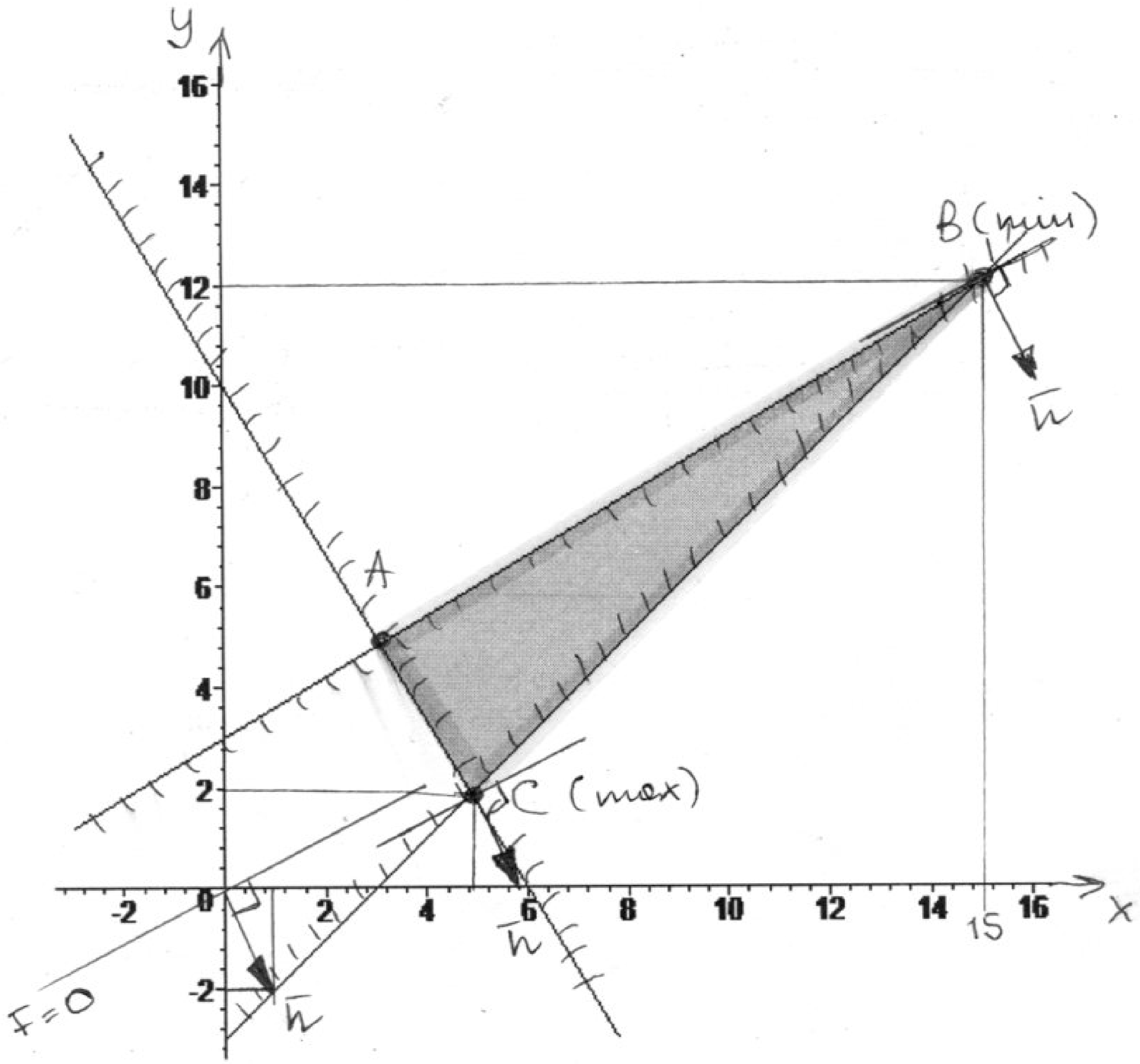
Строим прямые (по двум точкам каждую):

(I) $5x+3y=30$, точки (6, 0), (0, 10).

(II) $x-y=3$, точки (3, 0), (6, 3).

(III) $-3x+5y=15$, точки (0, 3), (5, 6).

Штриховкой выделяем нужные полуплоскости, соответствующие знакам неравенств.



На пересечении всех полуплоскостей получаем ограниченную выпуклую область ABC (закрашена на чертеже).

Строим линию уровня целевой функции $x-2y=0$ и вектор градиента $\overline{n}=(1,-2)$. Двигаем линию уровня параллельно себе по направлению градиента (и против направления градиента) (см. рисунок), пока не войдем в область и не выйдем из области.

Видно, что выход из области (максимум целевой функции) произойдет в точке пересечения прямых (I) и (II), она имеет координаты $C\left(\frac{39}{8};\frac{15}{8}\right)$, так как:

$$\begin{cases}5x+3y=30,\\ x-y=3,\end{cases} \begin{cases}5(3+y)+3y=30,\\ x=3+y,\end{cases} \begin{cases}8y=15,\\ x=3+y,\end{cases} \begin{cases}y=15/8,\\ x=39/8.\end{cases}$$

Таким образом, максимум целевой функции $F_{\max} = F\left(\frac{39}{8};\frac{15}{8}\right) = \frac{39}{8} - 2\cdot\frac{15}{8} = \frac{9}{8} = 1{,}125.$

Видно, что вход в область (минимум целевой функции) произойдет в точке $B(15;12)$. Таким образом, минимум целевой функции $F_{\min} = F(15;12) = 15 - 2\cdot 12 = -9.$