Тема: Пределы

Задание. *Найти предел последовательности*

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^6-6n^4+1}-n^2).$$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^6-6n^4+1}-n^2)=$$

Получаем неопределенность вида $\infty-\infty$. Поэтому умножаем и делим, на выражение, дополняющее до полного куба (чтобы избавиться от кубического корня):

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{n^6-6n^4+1}-n^2)\left((n^6-6n^4+1)^{2/3}+n^4+n^2\sqrt[3]{n^6-6n^4+1}\right)}{(n^6-6n^4+1)^{2/3}+n^4+n^2\sqrt[3]{n^6-6n^4+1}}=$$

Упрощаем по формуле разности кубов:

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-6n^4+1}{(n^6-6n^4+1)^{2/3}+n^4+n^2\sqrt[3]{n^6-6n^4+1}}=$$

Получаем неопределенность вида ∞/∞. Делим числитель и знаменатель на старшую степень n^4:

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-6+\frac{1}{n^4}}{(1-\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^6})^{2/3}+1+\sqrt[3]{1-\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^6}}}=\frac{-6}{1+1+1}=-2.$$

Мы учитываем, что $1/n^p\to 0$ при $n\to\infty$ ($p>1$ – число, степень).