

Решение задачи о преобразовании булевой функции

Задача. Представив функцию $f(\tilde{x}^n)$ формулой над множеством связок $\{\&, -\}$, преобразовать затем полученную формулу в полином Жегалкина функции $f(\tilde{x}^n)$ (используя эквивалентности $\overline{\overline{A}} = A \oplus 1$, $A \cdot (B \oplus C) = A \cdot B \oplus A \cdot C$, $A \cdot A = A$, $A \cdot 1 = A$, $A \oplus A = 0$, $A \oplus 0 = A$):

$$f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2) \cdot (x_2 \mid x_3)$$

Решение. Преобразуем функцию к формуле над множеством связок $\{\&, -\}$:

$$f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2) \cdot (x_2 \mid x_3) = (x_1 \vee x_2) \cdot (\overline{x_2 \vee x_3}) = \overline{\overline{(x_1 \vee x_2)} \cdot \overline{(x_2 \vee x_3)}} = \overline{\overline{(x_1 \cdot x_2)} \cdot \overline{(x_2 \cdot x_3)}}.$$

Теперь перейдем к полиному Жегалкина:

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}^3) &= \overline{\overline{(x_1 \cdot x_2)} \cdot \overline{(x_2 \cdot x_3)}} = \overline{(x_1 \oplus 1) \cdot (x_2 \oplus 1) \cdot (x_2 x_3 \oplus 1)} = \\ &= ((x_1 \oplus 1) \cdot (x_2 \oplus 1) \oplus 1) \cdot (x_2 x_3 \oplus 1) = \\ &= (((x_1 \oplus 1) \cdot x_2 \oplus (x_1 \oplus 1) \cdot 1) \oplus 1) \cdot (x_2 x_3 \oplus 1) = \\ &= ((x_1 x_2 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus 1) \oplus 1) \cdot (x_2 x_3 \oplus 1) = \\ &= (x_1 x_2 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus 1 \oplus 1) \cdot (x_2 x_3 \oplus 1) = \\ &= (x_1 x_2 \oplus x_2 \oplus x_1) \cdot (x_2 x_3 \oplus 1) = \\ &= (x_1 x_2 \cdot (x_2 x_3 \oplus 1) \oplus x_2 \cdot (x_2 x_3 \oplus 1) \oplus x_1 \cdot (x_2 x_3 \oplus 1)) = \\ &= (x_1 x_2 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_2 x_2 x_3 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1) = \\ &= x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 = \\ &= x_1 x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_2 \oplus x_1. \end{aligned}$$