Пример решения задачи
Интегральные уравнения

ЗАДАНИЕ.

Пользуясь теоремой Гильберта-Шмидта, исследовать и решить интегральное уравнение 2-го рода $(E+\lambda A)x = y$ *в гильбертовом пространстве* X.

$$X = L_2[0,\pi],\ \ Ax(t) = \int_0^{\pi} K(t,s)x(s),\ \ K(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt \cos ks}{k^5},\ \ y \in X$$

РЕШЕНИЕ.

Очевидно, что ядро $K(t,s)$ симметрично $\big(K(t,s) = K(s,t)\big)$ и ограничено (можно оценить сверху сходящимся рядом $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5}$. Также отсюда заключаем, что ряд сходится равномерно по t,s) Поэтому интеграл

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} |K(s,t)|^2 dt\, ds < \infty.$$

Значит, по теореме 1 глава 9 параграф 2 из Колмогорова-Фомина, оператор A является компактным. По теореме Гильберта-Шмидта существует ортогональная система собственных функций $\psi_n(t)$ в $L_2[0,\pi]$ оператора A и ядро K может быть представлено в виде суммы $\sum_{n,m} a_{mn}\psi_n(s)\psi_m(t)$. В нашем случае уже имеет место такое представление, так как система функций $\psi_k(t) = \cos kt$ является ортогональной в $L_2[0,\pi]$. Оператор A для каждой собственной функции $\cos nt$ имеет собственное значение $\frac{\pi}{2n^5}$, проверяется элементарно непосредственным интегрированием.

Разложим функцию y и неизвестную функцию x в ряд Фурье:

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty} x_n \cos nt\,, y(t)=\sum_{n=0}^{\infty} y_n \cos nt,$$

$$x_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(t)\cos nt\,dt.$$

Подставим в уравнение:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \cos nt=\sum_{n=0}^{\infty} x_n \cos nt+\lambda\int_0^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kt\cos ks}{k^5}x(s)ds.$$

Переставляя местами сумму и интеграл, что законно ввиду равномерной сходимости ряда, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \cos nt=\sum_{n=0}^{\infty} x_n \cos nt+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kt}{k^5}\int_0^{\pi}\cos ks\,x(s)\,ds$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} x_n \cos nt+\frac{\pi\lambda}{2}\sum_{k=1}^{\infty} x_k\frac{\cos kt}{k^5}.$$

Отсюда имеем уравнения

$$y_0=x_0, y_n=x_n+\frac{\frac{\pi\lambda}{2}x_n}{n^5},$$

Откуда

$$x_0=y_0, x_n=\frac{y_n}{1+\frac{\pi\lambda}{2n^5}}.$$

Если знаменатель не равен 0 ни при каком n, то в этом случае решение будет единственно.

Если знаменатель =0 и соответствующий $y_n=0$, то уравнение имеет бесконечное множество решений, x_n можно выбирать любым. А если при нулевом знаменателе соответствующий $y_n \neq 0$, то уравнение решений не имеет.