Пример решения интегрального уравнения с помощью преобразования Лапласа

ЗАДАНИЕ.

Применяя преобразование Лапласа, решить интегральное уравнение

$$y(x) = e^{-x}\sin x + \int_0^x e^{(x-t)} y(t)dt .$$

РЕШЕНИЕ.

Применим к обеим частям уравнения (6.16.1) преобразование Лапласа. Пусть $Y(p) \doteqdot y(x)$. Как известно,

$e^{-x}\sin x \doteqdot \dfrac{1}{(p+1)^2+1} = \dfrac{1}{p^2+2p+2}$, $e^x \doteqdot \dfrac{1}{p-1}$, $\sin x \doteqdot \dfrac{1}{p^2+1}$.

Перейдем от уравнения (6.16.1) к уравнению в пространстве изображений

$$Y(p) = \frac{1}{p^2+2p+2} + \frac{1}{p-1}Y(p).$$

Для изображения будем иметь

$$Y(p) = \frac{p-1}{(p-2)(p^2+2p+2)}. \qquad (6.16.2)$$

Разложим полученную дробь (6.16.2) на простые множители:

$$\frac{p-1}{(p-2)(p^2+2p+2)} = \frac{A}{p-2} + \frac{Bp+C}{p^2+2p+2},$$

$p - 1 = A(p^2+2p+2) + (Bp+C)(p–2)$,

$p - 1 = (A+B)p^2 + (2A–2B+C)p + (2A–2C)$,

$A+B=0$, $\quad A=\dfrac{1}{10}$,

$2A–2B+C=1$, $\quad B=-\dfrac{1}{10}$,

$2A–2C=–1$, $\quad C=\dfrac{3}{5}$.

$$\frac{p-1}{(p-2)\left(p^2+2p+2\right)}=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{10}\cdot\frac{p}{p^2+2p+2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{p^2+2p+2}.$$

Таким образом,

$$Y(p)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{10}\cdot\frac{p}{p^2+2p+2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{p^2+2p+2},$$

$$Y(p)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{10}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+1}+\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{(p+1)^2+1}.$$

Используя формулы преобразований Лапласа, получим решение уравнения (6.16.1):

$$y(x)=\frac{1}{10}e^{2x}-\frac{1}{10}e^{-x}\cos x+\frac{7}{10}e^{-x}\sin x.$$