

Микроэкономика, пример решения задачи Построение производственной функции Кобба-Дугласа

ЗАДАНИЕ.

На основании представленных в таблице ниже данных построить ПФ типа Кобба-Дугласа. Сделать прогноз объема производства отрасли на 2000 год, если планируются увеличение основных фондов на 20% и одновременное уменьшение трудовых ресурсов на 5% относительно предыдущего года. Пусть заданы агрегированные основные показатели некоторой отрасли за четыре года:

Год	Объем производства Y , млн ден. ед.	Основные фонды K , млн ден. ед.	Трудовые ресурсы L , тыс. человек
1993	431	650	91
1994	440	710	93
1995	462	773	94
1996	482	836	95
1997	503	888	95
1998	510	890	95
1999	531	913	96

РЕШЕНИЕ.

Параметры A , α , входящие в функцию Кобба-Дугласа $Y = A \cdot K^\alpha \cdot L^{1-\alpha}$, найдем методом наименьших квадратов по данным этой таблицы. Если обозначить

$$y = \ln \frac{Y}{L}; \quad x = \ln \frac{K}{L}; \quad c = \ln A$$

то функцию Кобба-Дугласа можно переписать в логарифмах в линейном виде:

$$\ln \frac{Y}{L} = \ln A + \alpha \ln \frac{K}{L}$$

или $y = c + \alpha x$.

Коэффициенты регрессии c, α в полученной линейной зависимости находим по следующим формулам:

$$\alpha = \frac{n \sum(x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n \sum(x_i^2) - (\sum x_i)^2}$$

$$c = \frac{1}{n} \sum(y_i) - \alpha \cdot \frac{1}{n} \sum(x_i)$$

Здесь данные по x_i, y_i вводятся из таблицы ниже:

Год	$y = \ln \frac{Y}{L}$	$x = \ln \frac{K}{L}$
1993	1,56	1,97
1994	1,55	2,03
1995	1,59	2,11
1996	1,62	2,17
1997	1,67	2,24
1998	1,68	2,24
1999	1,71	2,25

Составим расчетную таблицу:

Год	y	x	yx	x ²
1993	1,56	1,97	3,06	3,87
1994	1,55	2,03	3,16	4,13

1995	1,59	2,11	3,35	4,44
1996	1,62	2,17	3,53	4,73
1997	1,67	2,24	3,73	5,00
1998	1,68	2,24	3,76	5,01
1999	1,71	2,25	3,85	5,07
$n = 7$	сумма			
	11,38	15,01	24,44	32,24

$$\alpha = \frac{7 \cdot 24.44 - 11.38 \cdot 15.01}{7 \cdot 32.24 - 15.01^2} \approx 0.529$$

$$c = \frac{1}{7} \cdot 11.38 - 0.529 \cdot \frac{1}{7} \cdot 15.01 \approx 0.493$$

$$A = e^c = e^{0.493} \approx 1.637$$

Функция Кобба-Дугласа имеет вид:

$$Y \approx 1.637 \cdot K^{0.529} \cdot L^{1-0.529} = 1.637 \cdot K^{0.529} \cdot L^{0.471}$$

Сделаем прогноз объема производства отрасли на 2000 год, если планируются увеличение основных фондов на 20% и одновременное уменьшение трудовых ресурсов на 5% относительно предыдущего года.

Новые значения: $K = 913 \cdot 1.2 = 1095.6$; $L = 96 \cdot 0.95 = 91.2$, тогда прогноз объема производства:

$$Y_{2000} \approx 1.801 \cdot 1095.6^{0.502} \cdot 91.2^{0.498} \approx 555.747$$