## Тема: Универсальная тригонометрическая подстановка

Задание. *Найти неопределенный интеграл.*

$$\int \frac{dx}{3\cos x+\sin x+5}$$

Решение:

Введем подстановку (универсальная тригонометрическая подстановка):

$$\left| \begin{matrix} tg\dfrac{x}{2}=t & \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2} & \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2} \end{matrix} \right|$$

Получим: $\displaystyle\int \frac{dx}{3\cos x+\sin x+5}=\int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{3\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+\dfrac{2t}{1+t^2}+5}=$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}+5=\frac{3-3t^2+2t+5+5t^2}{1+t^2}=\frac{2t^2+2t+8}{1+t^2}=\frac{2(t^2+t+4)}{1+t^2}$$

Подставим под знак интеграла:

$$=\int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{\dfrac{2(t^2+t+4)}{1+t^2}}=$$

$$\int \frac{2}{2(t^2+t+4)}dt=\int \frac{1}{t^2+t+4}dt$$

Выделим полный квадрат в знаменателе дроби:

$$t^2+t+4=[t^2+2\cdot\frac{1}{2}t+(\frac{1}{2})^2]-\frac{1}{4}+4=(t+\frac{1}{2})^2+\frac{15}{4}$$

Подставим полученное:

$$\int \frac{1}{t^2+t+4}dt=\int \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{15}{4}}dt=\left| \begin{matrix} \textit{по таблице основных интегралов}: \\ \displaystyle\int \frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{u}{a}+C, \\ u=t+\dfrac{1}{2};\quad du=dt \\ a^2=\dfrac{15}{4};\quad a=\dfrac{\sqrt{15}}{2} \end{matrix} \right|=$$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{2}}arctg\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}}+C=\frac{2}{\sqrt{15}}arctg\frac{2(t+\frac{1}{2})}{\sqrt{15}}+C=\frac{2}{\sqrt{15}}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{15}}+C=$$

(обратная подстановка $t=tg\frac{x}{2}$)

$$=\frac{2}{\sqrt{15}}arctg\frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{15}}+C.$$

Ответ: $\int\frac{dx}{3\cos x+\sin x+5}=\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{15}}+C$