

Прикладная математика

Пример решения задачи теории игр

Задача. Швейное предприятие реализует свою продукцию через магазин. Сбыт зависит от состояния погоды. В условиях теплой погоды предприятие реализует a костюмов и b платьев, а при прохладной погоде - c костюмов и d платьев. Затраты на изготовление одного костюма равны α_0 , а платья - β_0 рублям, цена реализации соответственно равна α_1 рублей и β_1 рублей. Определить оптимальную стратегию предприятия.

$$a = 1000, b = 2300, c = 1400, d = 700,$$

$$\alpha_0 = 20, \beta_0 = 5, \alpha_1 = 40, \beta_1 = 12.$$

Решение. Составим математическую модель задачи. В связи с возможными состояниями спроса фирма располагает двумя стратегиями.

1. $F_1 = (1000, 2300)$ – произвести 1000 костюмов и 2300 платьев,
2. $F_2 = (1400, 700)$ - произвести 1400 костюмов и 700 платьев.

Природа (рынок) располагает также двумя стратегиями:

1. D_1 = погода теплая,
2. D_2 = погода прохладная.

Если фирма примет стратегию F_1 и спрос действительно будет находиться в первом состоянии, то есть погода будет теплой (D_1), то выпущенная продукция будет полностью реализована и доход составит

$$w_{11} = 1000 \cdot (40 - 20) + 2300 \cdot (12 - 5) = 36100.$$

Если фирма примет стратегию F_1 , а спрос будет находиться в состоянии D_2 (погода прохладная), то платья будут реализованы лишь частично, и доход

составит:

$$w_{12} = 1000*(40-20) + 700*(12-5) - (2300-700)*5 = 16900.$$

Аналогично, если фирма выберет стратегию F_2 , а природа – стратегию D_1 (погода теплая), то доход составит (будут недораспроданы костюмы):

$$w_{21} = 1000*(40-20) + 700*(12-5) - (1400-1000)*20 = 16900,$$

а если природа выберет стратегию D_2 , то

$$w_{22} = 1400*(40-20) + 700*(12-5) = 32900.$$

Рассматривая фирму и природу в качестве двух игроков, получим платежную матрицу игры

$$W = \begin{pmatrix} 36100 & 16900 \\ 16900 & 32900 \end{pmatrix}$$

которая будет служить игровой моделью задачи.

Поскольку максиминная стратегия игры составляет $a = \max(16900, 16900) = 16900$, а минимаксная $b = \min(36100, 32900) = 32900$, то цена игры лежит в диапазоне

$$16900 \text{ ден. ед.} < v < 32900 \text{ ден. ед.}$$

Решения игры в чистых стратегиях не существует, поэтому будем искать решение в смешанных стратегиях.

Решим данную игру аналитическим методом.

Средний выигрыш первого игрока, если он использует оптимальную смешанную стратегию $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, а второй игрок – чистую стратегию, соответствующую первому столбцу платежной матрицы, равен цене игры v :

$$36100x_1^* + 16900x_2^* = v.$$

Тот же средний выигрыш получает первый игрок, если второй игрок применяет стратегию, соответствующую второму столбцу платежной матрицы, то есть

$$16900x_1^* + 32900x_2^* = v.$$

Учитывая, что $x_1^* + x_2^* = 1$, получаем систему уравнений для определения оптимальной стратегии первого игрока и цены игры:

$$\begin{cases} 36100x_1^* + 16900x_2^* = v, \\ 16900x_1^* + 32900x_2^* = v, \\ x_1^* + x_2^* = 1. \end{cases}$$

Решаем эту систему и находим:

$$\begin{cases} x_1^* = 5/11, \\ x_2^* = 6/11, \\ v = 281900/11. \end{cases}$$

Оптимальная стратегия фирмы:

$$P^* = x_1^*F_1 + x_2^*F_2 = \frac{5}{11}(1000, 2300) + \frac{6}{11}(1400, 700) = \left(\frac{13400}{11}; \frac{15700}{11} \right) \approx (1218; 1427)$$

Таким образом, фирме оптимально произвести 1218 костюмов и 1427 платьев.