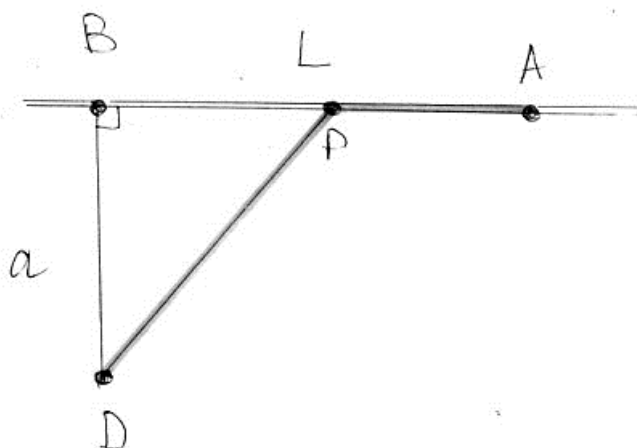


Прикладная математика

Пример решения задачи о прокладке дорог

Завод D нужно соединить шоссейной дорогой с прямолинейной железной дорогой, на которой стоит город A . Расстояние DB до железной дороги равно a , расстояние AB по железной дороге равно L . Стоимость перевозок по шоссе в m раз дороже ($m > 1$) стоимости перевозок по железной дороге. Как провести шоссе DP к железной дороге, чтобы стоимость перевозок от завода к городу была наименьшей?

Решение. Сделаем схематический чертеж.



Пусть точка P на железной дороге, куда проводится шоссейная дорога от завода D , находится на расстоянии x ($x \geq 0$) от точки B , то есть $BP = x$, $PA = L - x$.

Вычислим длину шоссейной дороги DP . DP - это гипотенуза прямоугольного треугольника BPD , поэтому

$$DP = \sqrt{BD^2 + BP^2} = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Итак, перевозка будет идти по шоссейной дороге длиной $DP = \sqrt{a^2 + x^2}$ и по

железной дороге длиной $PA = L - x$. Тогда общая стоимость перевозок (с точностью до некоторого коэффициента – стоимости перевозок по железной дороге) равна

$$F = m\sqrt{x^2 + a^2} + L - x, \text{ где } m > 1.$$

Нужно найти минимум этой функции. Для этого вычисляем первую производную и приравниваем к нулю:

$$F' = \left(m\sqrt{x^2 + a^2} + L - x \right)' = \frac{2mx}{2\sqrt{x^2 + a^2}} - 1 = \frac{mx - \sqrt{x^2 + a^2}}{\sqrt{x^2 + a^2}} = 0,$$

$$mx - \sqrt{x^2 + a^2} = 0,$$

$$x^2 + a^2 = m^2 x^2,$$

$$x^2(m^2 - 1) = a^2,$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{m^2 - 1}}.$$

Получили критическую точку $x = \frac{a}{\sqrt{m^2 - 1}}$. Осталось показать, что в этой точке

функция действительно достигает минимума.

Для этого вычислим вторую производную:

$$F'' = \left(\frac{mx}{\sqrt{x^2 + a^2}} - 1 \right)' = m \frac{1\sqrt{x^2 + a^2} - x \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a^2}}}{\left(\sqrt{x^2 + a^2}\right)^2} = m \frac{x^2 + a^2 - x^2}{\left(\sqrt{x^2 + a^2}\right)^3} = \frac{ma^2}{\left(\sqrt{x^2 + a^2}\right)^3} > 0.$$

Действительно, в точке $x = \frac{a}{\sqrt{m^2 - 1}}$ функция (стоимость перевозок) достигает

минимума.

Таким образом, шоссе DP нужно провести к железной дороге, так чтобы

точка P находилась на расстоянии $x = \frac{a}{\sqrt{m^2 - 1}}$ от точки B . Тогда стоимость

перевозок от завода к городу будет наименьшей.