Тема: Конформное отображение

Задание. *Найдите взаимно-однозначное конформное отображение, переводящее* D_1 *на* D_2.

$D_1 = \{|z| < 1\},\ D_2 = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.

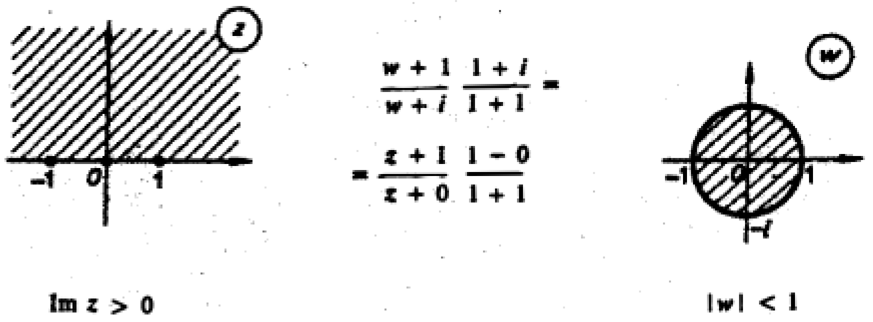
Решение.

Изобразим область $D_1 = \{|z| < 1\}$. Пусть $z = x + iy$, тогда условие $|z| < 1$ равносильно условию $\sqrt{x^2 + y^2} < 1$. Поскольку обе части неравенства неотрицательны, возведем их в квадрат. Тогда неравенство $\sqrt{x^2 + y^2} < 1$ равносильно неравенству $x^2 + y^2 < 1$. Таким образом, область D_1 представляет собой внутренность круга $x^2 + y^2 < 1$, а область D_2 - полукруга $\{x^2 + y^2 < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.

Известно, что существует единственное дробно-линейное отображение, которое три разные точки z_1, z_2, z_3 переводит соответственно в три разные точки w_1, w_2, w_3. Это отображение задается формулой:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}.$$

Пусть $z_1 = -1, z_2 = -i, z_3 = 1$, а $w_1 = -1, w_2 = 0, w_3 = 1$, тогда отображение $\frac{w+1}{w-0} \cdot \frac{1-0}{1+1} = \frac{z+1}{z+i} \cdot \frac{1+i}{1+1}$ переводит внутренность круга $x^2 + y^2 < 1$ в верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im} w > 0\}$.



№ 15

То есть

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{w+1}{w}=\frac{z+1+zi+i}{2(i+z)};$$

$$\frac{w+1}{w}=\frac{z+1+zi+i}{i+z};$$

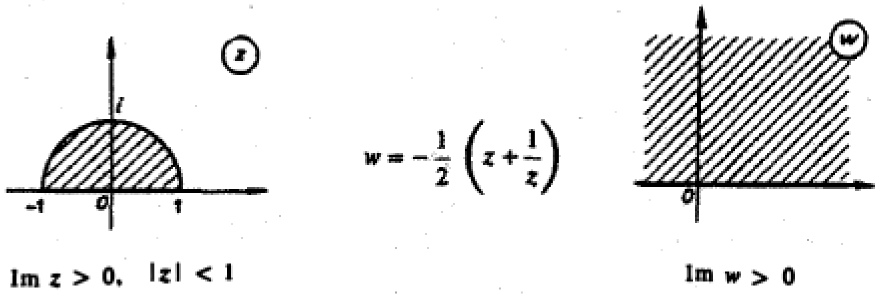
$$1+\frac{1}{w}=\frac{z+1+zi+i}{i+z};$$

$$\frac{1}{w}=\frac{z+1+zi+i}{i+z}-1;$$

$$\frac{1}{w}=\frac{z+1+zi+i-i-z}{i+z};$$

$$\frac{1}{w}=\frac{1+zi}{i+z};\ w=\frac{i+z}{1+zi}.$$

Известно, что отображение $w=-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ переводит внутренность полукруга $\{x^2+y^2<1, \operatorname{Im} z>0\}$ в верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im} w>0\}$.



№ 9

Значит, обратное к нему отображение $-z-\sqrt{z^2-1}$ переводит верхнюю плоскость в полукруг. В нашем случае $z=w$. Искомое отображение

$$w_1 = -w - \sqrt{w^2 - 1} = -\frac{i+z}{1+zi} - \sqrt{\left(\frac{i+z}{1+zi}\right)^2 - 1} = -\frac{i+z}{1+zi} - \frac{\sqrt{-1+2iz+z^2-1+z^2-2zi}}{1+zi} =$$

$$= -\frac{i+z}{1+zi} - \frac{\sqrt{2z^2-2}}{1+zi}.$$

Ответ: $w_1 = -\frac{i+z}{1+zi} - \frac{\sqrt{2z^2-2}}{1+zi}$.