

Решенная задача на тему: машина Тьюринга

ЗАДАНИЕ.

Построить МТ, которая вычисляет остаток от деления заданного конструктивного натурального числа на 5.

РЕШЕНИЕ.

Конструктивное натуральное число – это число вида $0\underbrace{111\dots1}_n$ (число n).

Обозначения:

- – символ пустой ячейки на ленте;
- L – движение считывающей головки влево;
- R – движение считывающей головки вправо;
- S – головка остаётся на месте;
- q_0 – начальное состояние МТ;
- q_f – конечное состояние МТ.

Идея алгоритма:

1. Если при движении головки от начального нуля вправо вдоль записанного на ленте числа n обнаруживается, что на ленте записано 5 единиц, головка возвращается назад к первому нулю, заменяя при этом все 5 единиц нулями.
2. Затем головка опять двигается вправо, стирает все нули и заменяет их символами пустых ячеек.
3. Шаги 1 и 2 повторяются, пока все имеющиеся группы из пяти единиц в числе не будут заменены пустыми ячейками.
4. Если МТ обнаруживает, что на ленте не осталось единиц или их осталось меньше пяти, работа МТ прекращается. На ленте остаётся ноль (если число делится на 5 без остатка) или число, которое равно остатку от деления заданного числа на 5.

Команды МТ:

$q_0\Box \rightarrow q_0\Box, R$ (движение головки вправо до начала записанного числа)

$q_00 \rightarrow q_10, R$ (найдено начало числа)

$q_11 \rightarrow q_21, R$ (найдена первая единица)

$q_1\Box \rightarrow q_f\Box, L$ (если единиц не осталось, работа МТ заканчивается, остаток 0)

$q_21 \rightarrow q_31, R$ (найдена вторая единица)

$q_2\Box \rightarrow q_f\Box, L$ (если второй единицы не найдено, работа МТ заканчивается, остаток 1)

$q_31 \rightarrow q_41, R$ (найдена третья единица)

$q_3\Box \rightarrow q_f\Box, L$ (если третьей единицы не найдено, работа МТ заканчивается, остаток 2)

$q_41 \rightarrow q_51, R$ (найдена четвёртая единица)

$q_4\Box \rightarrow q_f\Box, L$ (если 4-той единицы не найдено, работа МТ заканчивается, остаток 3)

$q_5\Box \rightarrow q_f\Box, L$ (если пятой единицы не найдено, работа МТ заканчивается, остаток 4)

$q_51 \rightarrow q_60, L$ (найдена 5-я единица, возвращение назад и замена пяти единиц нулями)

$q_61 \rightarrow q_70, L$

$q_71 \rightarrow q_80, L$

$q_81 \rightarrow q_90, L$

$q_91 \rightarrow q_{10}0, L$

$q_{10}0 \rightarrow q_{10}\Box, R$ (найдено начало, стирание нулей и движение вправо к началу оставшегося числа)

$q_{10}1 \rightarrow q_{11}1, L$ (найдена первая единица оставшегося числа)

$q_{10}\Box \rightarrow q_f0, S$ (если единиц не осталось, работа МТ заканчивается, остаток 0)

$q_{11}\Box \rightarrow q_10, R$ (восстанавливается ноль перед первой единицей оставшегося числа)

Таблица команд МТ:

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	q_{11}
\square	$q_0\square,R$	$q_f\square,L$	$q_f\square,L$	$q_f\square,L$	q_51,R	$q_f\square,L$	–	–	–	–	q_f0,S	$q_{10}R$
1	–	q_21,R	q_31,R	q_41,R	$q_f\square,L$	q_60,L	q_70,L	q_80,L	q_90,L	$q_{10}0,L$	$q_{11}1,L$	–
0	q_10,R	–	–	–	–	–	–	–	–	–	$q_{10}\square,R$	–

Проверка работы программы.

1) Проверка работы МТ для числа 5. Начальное состояние: $\square 011111\square$

$(q_0,\square,\square 011111\square) \vdash (q_0,\square,011111\square) \vdash (q_1,\square 0,11111\square) \vdash (q_2,\square 01,1111\square) \vdash$
 $(q_3,\square 011,111\square) \vdash$
 $\vdash (q_4,\square 0111,11\square) \vdash (q_5,\square 01111,1\square) \vdash (q_6,\square 0111,10\square) \vdash (q_7,\square 011,100\square) \vdash$
 $(q_8,\square 01,1000\square) \vdash$
 $\vdash (q_9,\square 0,10000\square) \vdash (q_{10},\square,000000\square) \vdash (q_{10},\square\square,00000\square) \vdash$
 $(q_{10},\square\square\square,0000\square) \vdash (q_{10},\square\square\square\square,000\square) \vdash$
 $\vdash (q_{10},\square\square\square\square,00\square) \vdash (q_{10},\square\square\square\square\square,0\square) \vdash (q_{10},\square\square\square\square\square\square,\square) \vdash (q_f,\square\square\square\square\square\square,0)$

Работа МТ заканчивается, остаток 0.

2) Проверка работы МТ для числа 3. Начальное состояние: $\square 0111\square$

$(q_0,\square,\square 0111\square) \vdash (q_0,\square,0111\square) \vdash (q_1,\square 0,111\square) \vdash (q_2,\square 01,11\square) \vdash (q_3,\square 011,1\square) \vdash (q_4,$
 $\square 0111,\square) \vdash$
 $\vdash (q_f,\square 011,1\square)$

Работа МТ заканчивается, остаток 3.

3) Проверка работы МТ для числа 6. Начальное состояние: $\square 0111111\square$

$(q_0,\square,\square 0111111\square) \vdash (q_0,\square,0111111\square) \vdash (q_1,\square 0,111111\square) \vdash (q_2,\square 01,11111\square) \vdash$
 $\vdash (q_3,\square 011,1111\square) \vdash (q_4,\square 0111,111\square) \vdash (q_5,\square 01111,11\square) \vdash (q_6,\square 0111,101\square) \vdash$

$$\begin{aligned}
 & \vdash (q_7, \square 011, 1001 \square) \vdash (q_8, \square 01, 10001 \square) \vdash (q_9, \square 0, 100001 \square) \vdash (q_{10}, \square, 0000001 \square) \vdash \\
 & \vdash (q_{10}, \square \square, 000001 \square) \vdash (q_{10}, \square \square \square, 00001 \square) \vdash (q_{10}, \square \square \square \square, 0001 \square) \vdash (q_{10}, \square \square \square \square \square, 001 \square) \vdash \\
 & \vdash (q_{10}, \square \square \square \square \square \square, 01 \square) \vdash (q_{10}, \square \square \square \square \square \square \square, 1 \square) \vdash (q_{11}, \square \square \square \square \square \square, \square 1 \square) \vdash \\
 & (q_1, \square \square \square \square \square \square 0, 1 \square) \vdash \\
 & \vdash (q_2, \square \square \square \square \square \square 01, \square) \vdash (q_f, \square \square \square \square \square \square 0, 1 \square)
 \end{aligned}$$

Работа МТ заканчивается, остаток 1.

4) Проверка работы МТ для числа 0. Начальное состояние: $\square 0 \square$

$$(q_0, \square, \square 0 \square) \vdash (q_0, \square \square, 0 \square) \vdash (q_1, \square \square 0, \square) \vdash (q_f, \square \square, 0 \square)$$

Работа МТ заканчивается, остаток 0.