Пример вычисления работы силы с помощью криволинейного интеграла

Задание.

Вычислить работу силы $\vec{F}$ при перемещении точки приложения силы вдоль заданной кривой L от точки B до точки C, если значения параметра t в точках B и C заданы.

Номер варианта	Сила $\vec{F}$	Параметрические уравнения кривой L	Значения параметра t в точках B и C
2	$\vec{F}=-x\,\vec{i}+2y^2\,\vec{j}$	$x=2\cos t,\ \ y=\sin t$	$t_B=0,\ t_C=\dfrac{\pi}{6}$

Решение.

Работа силы $\bar{F}=P(x,y)\bar{\imath}+Q(x,y)\bar{\jmath}$ при перемещении точки ее приложения вдоль участка дуги BC равна

$$A=\int_{BC} Pdx+Qdy$$

$$A=\int_{BC}(-x)dx+2y^2dy$$

Учитывая, что

$$\begin{cases} x=2\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx=-2\sin t\,dt \\ dy=\cos t\,dt \end{cases}$$

$$A=\int_{BC}(-x)dx+2y^2dy=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(-2\cos t\,(-2\sin t)+2\sin^2 t\cos t)dt=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos t\sin t)dt+2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin^2 t\cos t)dt=$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin t) d(\sin t) + 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin^2 t) d(\sin t) = \left(4 \cdot \frac{1}{2}\sin^2 t + 2 \cdot \frac{1}{3}\sin^3 t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2}\sin^2 \frac{\pi}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3}\sin^3 \frac{\pi}{6} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{12}$$

ОТВЕТ. $A = \frac{7}{12}$.