

Пример решения задачи: криволинейные интегралы

ЗАДАНИЕ.

Найти координаты силы притяжения дугой астроиды

$x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, единичной массы, помещенной в начале координат, если плотность астроиды в каждой ее точке равна кубу расстояния этой точки от начала координат.

РЕШЕНИЕ.

Кривая L притягивает массу m с силой, проекции которой равны

$$x_0 = gm \int_L \frac{\rho(x, y) \cos \theta}{r^2(x, y)} ds, \quad y_0 = gm \int_L \frac{\rho(x, y) \sin \theta}{r^2(x, y)} ds,$$

где g – гравитационная постоянная, $m = 1$ по условию, $\rho(x, y, z) = r^3(x, y, z)$, θ – полярный угол точки (x, y) (в нашем случае $\theta = t$).

Таким образом, проекция силы на ось абсцисс равна

$$x_0 = g \int_L \frac{\rho(x, y) \cos \theta}{r^2(x, y)} ds = g \int_L r(x, y, z) \cos t ds.$$

Дифференциал кривой равен

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \sqrt{(3a \cos^2 t \cdot (-\sin t))^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt = \\ &= \sqrt{9a^2 \cos^2 t \sin^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = 3a \cos t \sin t dt. \end{aligned}$$

Расстояние от начала координат равно

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2 \cos^6 t + a^2 \sin^2 t} = a \sqrt{\cos^6 t + \sin^2 t}.$$

Подставим полученные результаты:

Решение задачи по криволинейным интегралам скачано с
https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=makrint

(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

$$\begin{aligned}x_0 &= g \int_L r(x, y, z) \cos t ds = g \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sqrt{\cos^6 t + \sin^6 t} \cdot \cos t \cdot 3a \cos t \sin t dt = \\ &= 3a^2 g \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sqrt{\cos^6 t + \sin^6 t} \sin t dt .\end{aligned}$$

Получили эллиптический интеграл – неэлементарная функция.