Решение задачи Коши для системы ДУ с помощью преобразования Лапласа

ЗАДАНИЕ.

Решите задачу Коши для системы дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y, \end{cases} \quad x(0) = 0,\ y(0) = 1.$$

РЕШЕНИЕ.

Перейдем к изображениям:

$x(t) \Leftrightarrow X(p)$,

$x'(t) \Leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p)$,

$y(t) \Leftrightarrow Y(p)$,

$y'(t) \Leftrightarrow pY(p) - y(0) = pY(p) - 1$.

Получаем систему:

$$\begin{cases} pX(p) = X(p) - 2Y(p), \\ pY(p) - 1 = X(p) + 3Y(p); \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(p)(p-1) + 2Y(p) = 0, \\ -X(p) + Y(p)(p-3) = 1; \end{cases}$$

Найдем решение системы по формулам Крамера.

Основной определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-1 & 2 \\ -1 & p-3 \end{vmatrix} = (p-1)(p-3) + 2 = p^2 - 4p + 5.$$

Дополнительные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & p-3 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p-1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = p-1.$$

Получаем:

$$X(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-2}{p^2-4p+5}, \; Y(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{p-1}{p^2-4p+5}.$$

Возвращаемся к оригиналам:

$$X(p) = \frac{-2}{p^2-4p+5} = -2\frac{1}{(p-2)^2+1} = \Leftrightarrow -2e^{2t}\sin t = x(t).$$

$$Y(p) = \frac{p-1}{p^2-4p+5} = \frac{p-2+1}{(p-2)^2+1} = \frac{p-2}{(p-2)^2+1} + \frac{1}{(p-2)^2+1} \Leftrightarrow e^{2t}\cos t + e^{2t}\sin t = y(t).$$

Получили решение:

$$\begin{cases} x(t) = -2e^{2t}\sin t, \\ y(t) = e^{2t}\cos t + e^{2t}\sin t. \end{cases}$$