# Операционное исчисление
# Нахождение изображения функции по определению

Задание.

Пользуясь определением, найти изображение функции:

$$f(t) = 3^t$$

Решение.

Используя определение преобразования Лапласа, получим

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty 3^t e^{-pt}dt = \left| \begin{matrix} u = 3^t & dv = e^{-pt}dt \\ du = 3^t \ln 3\, dt & v = -\frac{1}{p}e^{-pt} \end{matrix} \right| =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{p}3^t e^{-pt}\Big|_0^b\right) + \int_0^\infty 3^t \ln 3 \cdot \frac{1}{p}e^{-pt}dt$$

$$= -\frac{1}{p}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{3^b}{e^{pb}} - 3^0 e^0\right) + \frac{\ln 3}{p}\int_0^\infty 3^t e^{-pt}dt =$$

$$= -\frac{1}{p}(0-1) + \frac{\ln 3}{p}\int_0^\infty 3^t e^{-pt}dt = \frac{\ln 3}{p}\int_0^\infty 3^t e^{-pt}dt + \frac{1}{p}$$

$$\int_0^\infty 3^t e^{-pt}dt = \frac{\ln 3}{p}\int_0^\infty 3^t e^{-pt}dt + \frac{1}{p}$$

$$\left(1 - \frac{\ln 3}{p}\right)\int_0^\infty 3^t e^{-pt}dt = \frac{1}{p}$$

$$\int_0^\infty 3^t e^{-pt}dt = \frac{\frac{1}{p}}{1 - \frac{\ln 3}{p}} = \frac{\frac{1}{p}}{\frac{p - \ln 3}{p}} = \frac{1}{p - \ln 3}$$

$$F(p) = \frac{1}{p - \ln 3}$$

Ответ.

$$F(p) = \frac{1}{p - \ln 3}$$