

Дискретная случайная величина, коэффициент корреляции

Пример решения задачи

Задача. В урне лежат 100 шаров, из них 25 белых. Из урны последовательно вынимают два шара. Пусть X_i – число белых шаров, появившихся при i -м вынимании ($i=1,2$). Найти коэффициент корреляции между величинами X_1 и X_2 .

Решение. Составим таблицу распределения совместного появления данных случайных величин. Ясно, что X_i могут принимать значения или 0, или 1. Для простоты обозначим: $X_1 = X, X_2 = Y$.

Найдем все вероятности.

$X = 0, Y = 0$ - при первом вынимании вынут черный шар с вероятностью $\frac{75}{100}$, при втором – также черный шар, с вероятностью $\frac{74}{99}$, итого получаем $P(X = 0, Y = 0) = \frac{75}{100} \cdot \frac{74}{99} = \frac{37}{66}$.

$X = 0, Y = 1$ - при первом вынимании вынут черный шар с вероятностью $\frac{75}{100}$, при втором – белый шар, с вероятностью $\frac{25}{99}$, итого получаем $P(X = 0, Y = 1) = \frac{75}{100} \cdot \frac{25}{99} = \frac{25}{132}$.

$X = 1, Y = 1$ - при первом вынимании вынут белый шар с вероятностью $\frac{25}{100}$, при втором – белый шар, с вероятностью $\frac{24}{99}$, итого получаем $P(X = 1, Y = 1) = \frac{25}{100} \cdot \frac{24}{99} = \frac{2}{33}$.

$X = 1, Y = 0$ - при первом вынимании вынут белый шар с вероятностью $\frac{25}{100}$, при втором – черный шар, с вероятностью $\frac{75}{99}$, итого получаем $P(X = 1, Y = 0) = \frac{25}{100} \cdot \frac{75}{99} = \frac{25}{132}$.

Получили таблицу:

$X \setminus Y$	0	1
0	37/66	25/132
1	25/132	2/33

Найдем индивидуальные законы распределения X и Y , складывая вероятности по столбцам и строкам, получаем:

x_i	0	1	Сумма
p_i	0,75	0,25	1

y_i	0	1	Сумма
p_i	0,75	0,25	1

Найдем математические ожидания, дисперсии и средние квадратические отклонения случайных величин X и Y .

$$M(X) = \sum x_i \cdot p_i = 0,25$$

$$D(X) = \sum x_i^2 \cdot p_i - (M(X))^2 = 0,25 - 0,25^2 = 0,1875.$$

$$M(Y) = \sum y_i \cdot p_i = 0,25$$

$$D(Y) = \sum y_i^2 \cdot p_i - (M(Y))^2 = 0,25 - 0,25^2 = 0,1875$$

$$\text{Вычислим } M(XY) = \sum x_i y_j p_{ij} = 2/33.$$

Тогда коэффициент корреляции:

$$\rho_{xy} = \frac{M(XY) - M(X)M(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{\frac{2}{33} - 0,25^2}{\sqrt{0,1875 \cdot 0,1875}} \approx -0,01.$$

Коэффициент корреляции между величинами X_1 и X_2 равен -0,01.