Дискретная случайная величина, числовые характеристики, графики

Пример решения

Задание. В ящике содержится 7 стандартных и 3 бракованных детали. Вынимают детали последовательно до появления стандартной, не возвращая их обратно. ξ - число извлеченных бракованных деталей.

Составить закон распределения дискретной случайной величины ξ, вычислить ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, начертить многоугольник распределения и график функции распределения.

Решение.

Дискретная случайная величина ξ - число извлеченных бракованных деталей - может принимать значения 0, 1, 2, 3.

Если $\xi = 0$, то первая же извлеченная деталь - стандартная. Вероятность этого:

$$P(\xi = 0) = \frac{7}{10}$$

Если $\xi = 1$, то первая извлеченная деталь - бракованная, вторая - стандартная. Вероятность этого:

$$P(\xi = 1) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{30}$$

Если $\xi = 2$, то первая извлеченная деталь - бракованная, вторая - бракованная, третья - стандартная. Вероятность этого:

$$P(\xi = 2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{120}$$

Если $\xi = 3$, то первая извлеченная деталь - бракованная, вторая - бракованная, третья - бракованная, четвертая - стандартная. Вероятность этого:

$$P(\xi = 3) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{7} = \frac{1}{120}$$

Проверим:

$$\frac{7}{10} + \frac{7}{30} + \frac{7}{120} + \frac{1}{120} = \frac{84 + 28 + 7 + 1}{120} = 1$$

Запишем закон распределения дискретной случайной величины ξ:

ξ	0	1	2	3
p	$7/10$	$7/30$	$7/120$	$1/120$

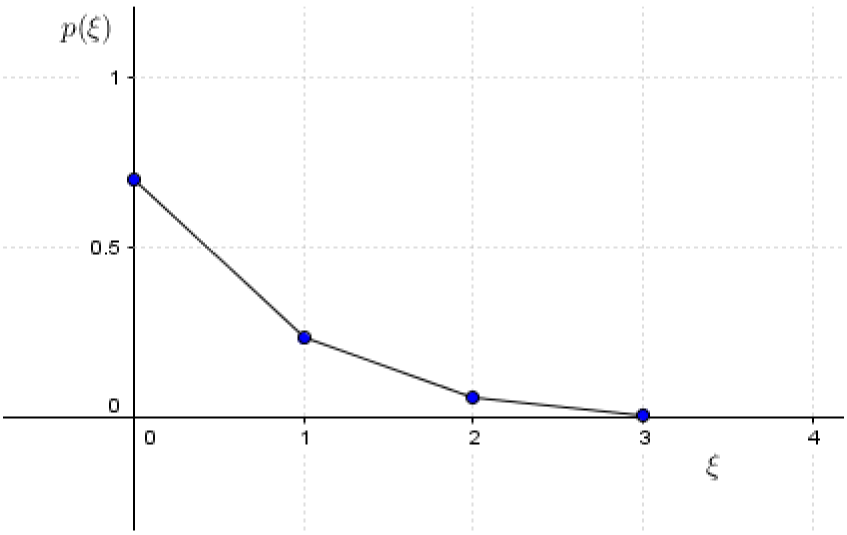
Вычислим ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение

$$M(\xi)=0\cdot\frac{7}{10}+1\cdot\frac{7}{30}+2\cdot\frac{7}{120}+3\cdot\frac{1}{120}=\frac{3}{8}$$

$$D(\xi)=M(\xi^2)-M^2(\xi)=0^2\cdot\frac{7}{10}+1^2\cdot\frac{7}{30}+2^2\cdot\frac{7}{120}+3^2\cdot\frac{1}{120}-\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{13}{24}-\frac{9}{64}=\frac{77}{192}$$

$$\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}=\sqrt{\frac{77}{192}}=\frac{\sqrt{231}}{24}$$

Построим многоугольник распределения случайной величины ξ. По оси абсцисс отложим значения случайной величины ξ, а по оси ординат - соответствующие значения вероятностей, полученные точки соединим отрезками:



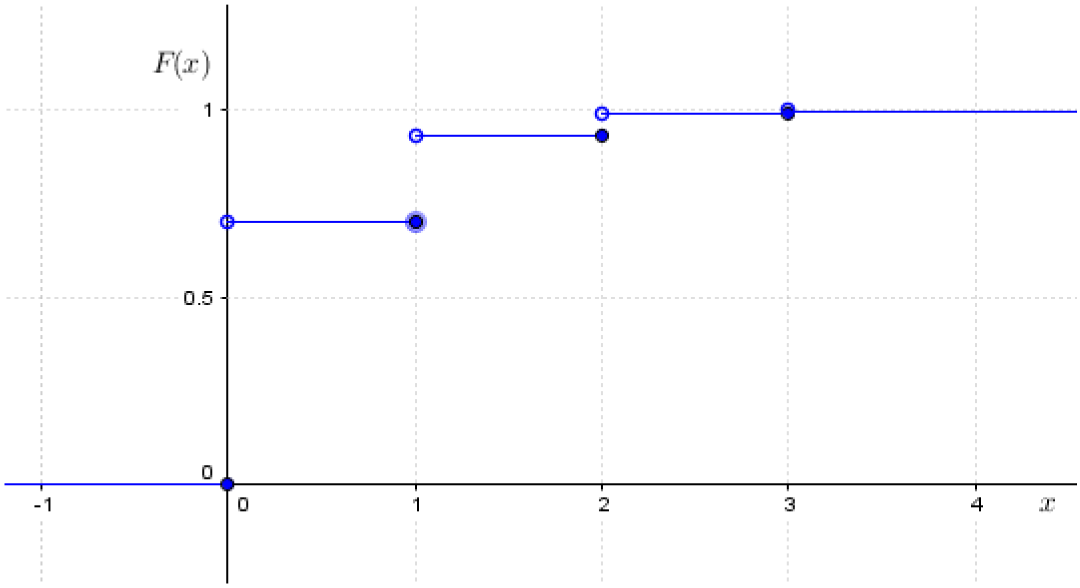
Запишем функцию распределения случайной величины ξ:

$$F(x)=P(\xi<x)$$

При $x\le 0$: $F(x)=P(\xi<0)=0$. При $0<x\le 1$: $F(\xi)=P(\xi<1)=P(\xi=0)=\frac{7}{10}$. При $1<x\le 2$: $F(x)=P(\xi<2)=\frac{7}{10}+\frac{7}{30}=\frac{28}{30}$. При $2<x\le 3$: $F(\xi)=P(\xi<3)=\frac{28}{30}+\frac{7}{120}=\frac{119}{120}$. При $x>3$: $F(x)=\frac{119}{120}+\frac{1}{120}=1$.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{7}{10}, & 0<x\le 1\\ \frac{28}{30}, & 1<x\le 2\\ \frac{119}{120}, & 2<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$$

Построим график:



Ответ.

ξ	0	1	2	3
p	$7/10$	$7/30$	$7/120$	$1/120$

$M(\xi)=\frac{3}{8};\ D(\xi)=\frac{77}{192};\ \sigma(\xi)=\frac{\sqrt{231}}{24}$