Решение задачи (показательный закон распределения)

Задача. Известно, что X~Exp(λ). Найдите вероятность события {| X - MX | < 3σ} ("правило 3σ" для показательного распределения).

Решение.

По условию получаем, что плотность распределения имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & при\ \ x\ge 0, \lambda>0.\end{cases}$$

Найдем функцию распределения $F(x)$ по определению $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Получаем:

Пусть $x<0$, тогда $f(x)=0$, тогда $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dt=0$.

Пусть $x\ge 0$, тогда $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, тогда

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dt+\int\limits_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda t}dt=-e^{-\lambda t}\Big|_{0}^{x}=1-e^{-\lambda x}.$$

Получаем: $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$

Математическое ожидание

$$a=M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)xdx=\int\limits_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=\left[-xe^{-\lambda x}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]\Bigg|_{0}^{\infty}=\frac{1}{\lambda}.$$

Дисперсия

$$\sigma^2=D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)x^2dx-(M(X))^2=\int\limits_{0}^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}x^2dx-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\left[-x^2e^{-\lambda x}-\frac{2x}{\lambda}e^{-\lambda x}-\frac{2}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\right]\Bigg|_{0}^{\infty}-\frac{1}{\lambda^2}=$$

$$=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Найдем вероятность:

$$P\{|X-M(X)|<3\sigma(X)\}=P\{|X-1/\lambda|<3/\lambda\}=P\{-2/\lambda<X<4/\lambda\}=P\{0<X<4/\lambda\}=$$

$$=F(4/\lambda)-F(0)=(1-e^{-4\lambda/\lambda})-(1-e^{0})=1-e^{-4}=0{,}982.$$

Ответ: 0,982.