

Показательный закон распределения

Задача о времени безотказной работы прибора с решением

Задача. Время в годах безотказной работы прибора подчинено показательному закону, т.е. плотность распределения этой случайной величины такова: $f(t)=2e^{-2t}$ при $t \geq 0$ и $f(t)=0$ при $t < 0$.

- 1) Найти формулу функции распределения этой случайной величины.
- 2) Определить вероятность того, что прибор проработает не более года.
- 3) Определить вероятность того, что прибор безотказно проработает 3 года.
- 4) Определить среднее ожидаемое время безотказной работы прибора.

Решение. Плотность распределения $f(t) = 2e^{-2t}$ при $t > 0$, то есть параметр распределения $\lambda = 2$.

1) Найдем функцию распределения $F(x)$ по определению $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$.

Пусть $x < 0$, тогда $f(x) = 0$, тогда $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$.

Пусть $x \geq 0$, тогда $f(x) = 2e^{-2x}$, тогда

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^0 0dt + 2 \int_0^x e^{-2t} dt = -e^{-2t} \Big|_0^x = 1 - e^{-2x}.$$

Получаем

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 - e^{-2t} & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

2) Определим вероятность того, что прибор проработает не более года, то есть безотказная работа от 0 до 1 года.

Используем известную формулу для показательного распределения:

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} = e^{-2a} - e^{-2b}.$$

Подставляем:

$$P(0 < X < 1) = e^0 - e^{-2} = 1 - e^{-2} \approx 0,865.$$

3) Определим вероятность того, что прибор безотказно проработает 3 года, то есть 3 или более лет (как минимум 3 года).

$$P(3 < X < \infty) = 1 - P(0 < X < 3) = 1 - (e^0 - e^{-3}) = 1 - 1 + e^{-3} = e^{-3} \approx 0,05.$$

4) Определим среднее ожидаемое время безотказной работы прибора – математическое ожидание. По формуле для показательного закона оно равно $M(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} = 0,5$ года.