Тема: Непрерывная случайная величина

ЗАДАНИЕ. *Случайная величина* X *задана плотностью вероятности:*

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ C\cdot(x-1), & 1<x\le 3;\\ 0, & x>3;\end{cases}\quad \alpha=0,\ \beta=3$$

Требуется:
а) найти коэффициент C *;*
б) найти функцию распределения $F(x)$ *;*
в) найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ *;*
г) найти вероятность $P(\alpha<X<\beta)$ *;*
д) построить графики $f(x)$ *и* $F(x)$ *.*

РЕШЕНИЕ.

а) Найдем параметр C из условия нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$. Получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_1^3 C\left(x-1\right)dx=C\int_1^3 (x-1)dx=C\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\Bigg|_1^3=C\left(\frac{1}{2}9-3-\frac{1}{2}+1\right)=2C=1,$$

откуда $C=1/2$.
Тогда:

$$f(x)=\begin{cases}0, & ï\,ðè\ \ x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{2}, & ï\,ðè\ \ 1<x\le 3,\\ 0, & ï\,ðè\ \ x>3.\end{cases}$$

б) Найдем функцию распределения $F(x)$ по определению $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Получаем:

Пусть $x\le 1$, тогда $f(x)=0$, тогда $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} 0dt=0$.

Пусть $1<x\le 3$, тогда $f(x)=\frac{1}{2}\left(x-1\right)$, тогда

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{1} 0dt+\frac{1}{2}\int_1^x \left(t-1\right)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2-t\right)\Bigg|_1^x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}+1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}.$$

Пусть $x>3$, тогда $f(x)=0$, тогда

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{1} 0dt+\frac{1}{2}\int_1^3 \left(t-1\right)dt+\int_3^x 0dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2-t\right)\Bigg|_1^3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}9-3-\frac{1}{2}+1\right)=1.$$

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases}0, & \textit{при}\ -\infty<x\le 1,\\ \frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}, & \textit{при}\ 1<x\le 3,\\ 1, & \textit{при}\ 3<x<+\infty.\end{cases}$$

в) Найдем математическое ожидание MX и дисперсию DX.

$$MX=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)xdx=\frac{1}{2}\int_1^3 (x-1)\,xdx=\frac{1}{2}\int_1^3\left(x^2-x\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_1^3=$$

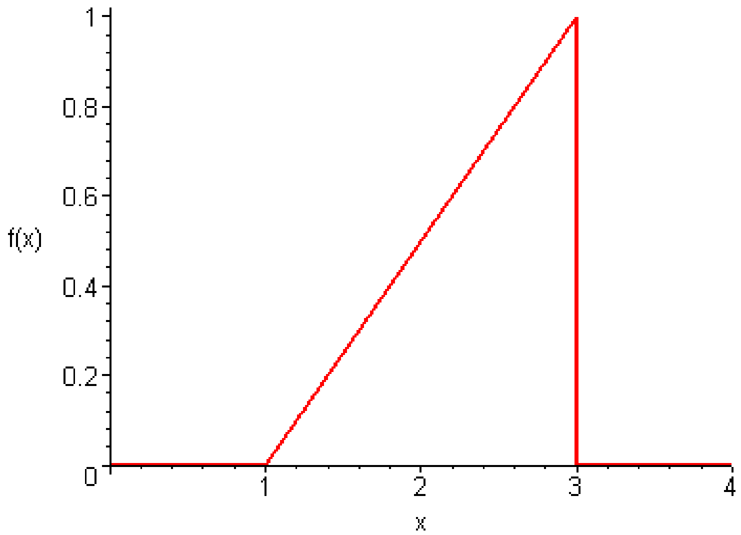
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}3^3-\frac{1}{2}3^2\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(9-\frac{9}{2}+\frac{1}{6}\right)=\frac{7}{3}.$$

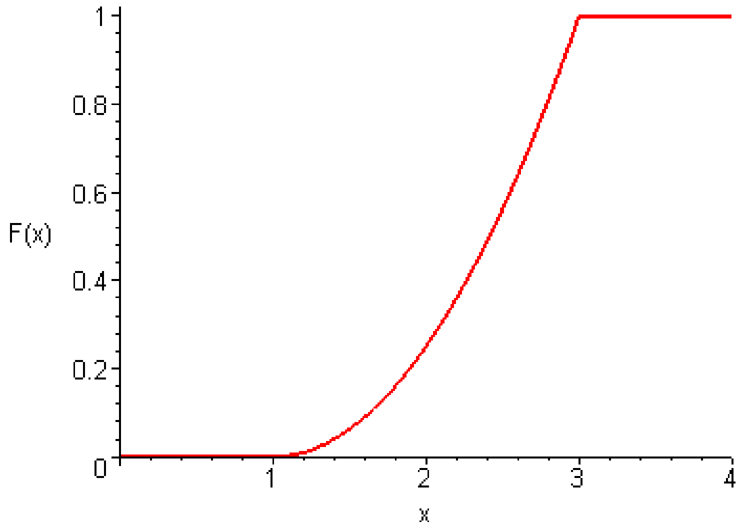
$$DX=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^2dx-(MX)^2=\frac{1}{2}\int_1^3 (x-1)\,x^2dx-\frac{49}{9}=\frac{1}{2}\int_1^3\left(x^3-x^2\right)dx-\frac{49}{9}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_1^3-\frac{49}{9}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}3^4-\frac{1}{3}3^3\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)-\frac{49}{9}=\frac{2}{9}.$$

г) Найдем вероятность попадания случайной величины X в интервал:
$P(0<x<3)=F(3)-F(0)=1-0=1$.

Д) Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$.




F(x)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
2
3
4
x