

Формула включений-исключений

Пример решения задачи

Задача. Из 100 человек студентов, сдавших сессию, 48 человек сдали экономику, 42 студента – математику и 37 человек – логику. По экономике или математике сдали экзамен 76 человек, по экономике или логике также 76 человек, а по математике или логике – 66 человек. Сколько человек сдали хотя бы один экзамен, если все три предмета сдали 5 человек? Сколько человек не сдали ни одного экзамена? Сколько человек сдали только один экзамен по логике?

Решение. Используем принцип включений и исключений. Введем обозначения:

A_l - множество студентов, сдавших логику,

A_e - множество студентов, сдавших экономику,

A_m - множество студентов, сдавших математику.

Получаем по условию:

$N_0 = 100$ - всего студентов.

$N(A_e) = 48$, $N(A_m) = 42$, $N(A_l) = 37$ студентов сдали один из предметов.

$N(A_e \cup A_m) = 76$, $N(A_e \cup A_l) = 76$, $N(A_l \cup A_m) = 66$ студентов сдали хотя бы один из двух предметов.

$N(A_l \cap A_m \cap A_e) = 5$ студентов сдали все три предмета.

Общая формула имеет вид:

$$N' = N_0 - N(A_l) - N(A_m) - N(A_e) + N(A_e \cap A_m) + N(A_e \cap A_l) + N(A_l \cap A_m) - N(A_e \cap A_l \cap A_m).$$

Здесь N' - число студентов, не сдавших ни один предмет.

Найдем число студентов, сдавших в точности два предмета:

$N(A_l \cap A_m) = N(A_l) + N(A_m) - N(A_l \cup A_m) = 37 + 42 - 66 = 13$ студентов сдали в точности только математику и логику.

$N(A_e \cap A_m) = N(A_e) + N(A_m) - N(A_e \cup A_m) = 48 + 42 - 76 = 14$ студентов сдали в точности только математику и экономику.

$N(A_l \cap A_e) = N(A_l) + N(A_e) - N(A_l \cup A_e) = 37 + 48 - 76 = 9$ студентов сдали в точности только экономику и логику.

Теперь ответим на вопросы задачи.

1) Сколько человек сдали хотя бы один экзамен.

Сначала найдем, сколько человек не сдали ни одного экзамена по основной формуле:

$$N' = 100 - 48 - 42 - 37 + 13 + 14 + 9 - 5 = 4.$$

Значит, $100 - 4 = 96$ студентов сдали хотя бы один экзамен.

2) Сколько человек не сдали ни одного экзамена.

4 человека (найдено выше).

3) Сколько человек сдали только один экзамен по логике:

$$N_l = N(A_l) - N(A_l \cap A_e) - N(A_l \cap A_m) + N(A_l \cap A_e \cap A_m) = 37 - 13 - 9 + 5 = 20.$$