

Формула включений и исключений

Пример решения задачи

Задача. На одной из кафедр университета работают 13 человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Десять человек знают английский, семеро - немецкий, шестеро - французский, пятеро знают английский и немецкий, четверо - английский и французский, трое - немецкий и французский. Выяснить:

- 1) сколько человек знают все три языка;
- 2) сколько человек знают ровно два языка;
- 3) сколько человек знают только английский язык.

Решение:

Пусть:

A – множество людей, знающих английский язык.

Мощность этого множества $m(A) = 10$.

H – множество людей, знающих немецкий язык.

Мощность этого множества $m(H) = 7$.

F – множество людей, знающих французский язык.

Мощность этого множества $m(F) = 6$.

Тогда:

$A \cap H$ – множество людей, знающих английский и немецкий язык, $m(A \cap H) = 5$.

$A \cap F$ – множество людей, знающих английский и французский язык, $m(A \cap F) = 4$.

$H \cap F$ – множество людей, знающих немецкий и французский язык, $m(H \cap F) = 3$.

$A \cap H \cap F$ – множество людей, знающих все три языка, $m(A \cap H \cap F) = t$.

Используем для решения задачи формулу включений и исключений.

Для трёх множеств A, H, F эта формула принимает следующий вид:

$$m(A \cup H \cup F) = m(A) + m(H) + m(F) - m(A \cap H) - m(A \cap F) - m(H \cap F) + m(A \cap H \cap F).$$

Подставляем значения: $m(A \cup H \cup F) = 10 + 7 + 6 - 5 - 4 - 3 + t = 13$

1) Находим t : $11 + t = 13$; $t = 2$.

Следовательно, все три языка знают 2 человека.

2) Число людей, которые знают ровно два языка можно подсчитать, если сложить

людей, которые знают хотя бы 2 языка и из каждого из этих множеств вычесть количество людей, знающих все 3 языка, т.е. следующим образом:

$$m(A \cap H) + m(A \cap F) + m(H \cap F) - 3 \cdot m(A \cap H \cap F) = 5 + 4 + 3 - 3 \cdot 2 = 12 - 6 = 6.$$

Следовательно, ровно 2 языка знают 6 человек.

3) Число людей, которые знают только один английский язык можно подсчитать, если из числа $m(A)$ вычесть тех людей, которые знают, кроме английского, ещё 1 или 2 языка, т.е. следующим образом:

$$m(A) - [m(A \cap H) + m(A \cap F) - m(A \cap H \cap F)] = 10 - [5 + 4 - 2] = 10 - 7 = 3.$$

Следовательно, только английский язык знают 3 человека.