Контрольная работа
Финансовая математика

Задача 7.

Банк принимает вклад на срок 90 дней под 18%, а на 180 дней под ставку $18^1/_4$%. Какой вариант вложения выгоднее и в каком случае?

Решение:

При использовании простых процентов множитель наращения определяется по формуле:

k = 1 + in, где

i – ставка процента;

n – срок.

I вариант:

k = 1 + 0,18*90/360 = 1,045

II вариант:

k = 1 + 0,1825*180/360 = 1,091

Следовательно, во всех случаях выгоднее второй вариант вложения, так как процентная ставка больше. Первый вариант выгоднее, если срок вклада должен составлять именно 90 дней.

Задача 17.

Имеется сумма в долларах США. Как выгоднее разместить депозит: в рублях, в долларах США или в евро, если простая годовая ставка по вкладам в рублях 10%, в долларах 4%, в евро 6%, срок депозита 3 месяца?

Курсы валют на начало операции:

Валюта	Курс покупки	Курс продажи
Доллар США	28,50	28,80
Евро	34,00	34,50

Ожидаемые курсы валют на конец операции:

Валюта	Курс покупки	Курс продажи
Доллар США	29,00	29,30

Евро	34,20	34,70

Рассчитать доходность операции в виде годовых процентных ставок.

Решение:

Годовая ставка по вкладам в рублях составит 10%.

При вложении денег в долларах сначала следует купить доллары, затем продать. При этом курс продажи к курсу покупки составит за 3 месяца 29,3/28,5 = 1,028. С учётом наращения множитель будет равен 1,028*(1 + 0,04/4) = 1,038, то есть процентная ставка за 3 месяца составит 3,8%, а за год 3,8*4 = 15,2%.

При вложении денег в евро курс продажи к курсу покупки составит за 3 месяца 34,7/34 = 1,021. С учётом наращения множитель будет равен 1,021*(1 + 0,06/4) = 1,036, то есть процентная ставка за 3 месяца составит 3,6%, а за год 3,6*4 = 14,4%.

Таким образом, выгоднее всего разместить депозит в долларах.

Задача 27.

Номинал процентного векселя 100 000 руб. По векселю начисляются проценты по ставке 18% годовых, с начала начисления процентов до момента предъявления векселя к оплате прошло 30 дней. Определить общую сумму, которую получит держатель векселя при его погашении. Расчет произвести по германской практике.

Решение:

Процентный вексель – ценная бумага покупаемая по номиналу с условием погашения всей суммы и процентов указанных в ней в конце срока.

Использование приближенного количества дней в каждом целом месяце и обыкновенных процентов называется “германской практикой” и обозначается 360/360. Определим сумму, получаемую при погашении:

S = 100000*(1 + 0,18*30/360) = 101500 руб.

Следовательно, держатель векселя при погашении получит 101500 руб.

Задача 37.

Стороны договорились, что из суммы кредита, выданного на 180 дней, удерживается дисконт в размере 11%. Определите цену кредита в виде простой годовой учетной ставки и простой годовой ставки наращения, если применяется германская практика расчета.

Ответ: 22%, 24,72%.

Решение:

Дисконт векселя определяется по формуле:

D = S*n*d, где

S – номинальная цена векселя;

d – учётная ставка.

Соответственно, дисконт в % к номиналу определяется по формуле:

$$D(\%) = \frac{S*n*d}{S}*100\% = n*d*100\%$$

Отсюда учётная ставка:

$$d = \frac{D(\%)}{n*100\%} = \frac{11}{180/360*100\%} = 0{,}22 = 22\%$$

Определим простую годовую ставку наращения:

$$\mathrm{i} = \frac{\mathrm{d}}{1-\mathrm{d}} = \frac{0{,}22}{1-0{,}22} = 0{,}282 = 28{,}2\%$$

Таким образом, простая годовая учётная ставка равна 22%, а простая годовая ставка наращения – 28,2%.

Задача 47.

Чему равна эффективная ставка процента, если банк начисляет проценты ежеквартально, исходя из номинальной ставки 17%?

Решение:

Эффективная ставка процента рассчитывается по формуле:

$$i_{\text{эфф}} = \left(1+\frac{i}{m}\right)^m - 1, \text{ где}$$

m – число начислений процентов в год.

Тогда:

$$i_{\text{эфф}} = \left(1+\frac{0{,}17}{4}\right)^4 - 1 = 0{,}181 = 18{,}1\%$$

Следовательно, эффективная ставка процента составляет 18,1%.

Задача 57.

Ссуда составляет 100 000 руб. на срок 10 дней. Предусматривается непрерывное начисление процентов по ежедневной силе роста, которая изменяется дискретно: в первые 5 дней она устанавливается равной 0,03%, в последующие 3 дня 0,035%, а в последние 2 дня 0,04%. Определить сумму погасительного платежа.

Решение:

При непрерывном начислении сложных процентов наращенная сумма определяется по формуле:

$S = P * e^{\delta n}$, где

δ - сила роста (ставка наращения при непрерывном начислении сложных процентов), выраженная в процентах или в виде соответствующей десятичной дроби.

Рассчитаем накопленные суммы.

Через 5 дней:

$S = 100000 * e^{0,0003*5} = 100150,1$ руб.

Через 3 дня:

$S = 100150,1 * e^{0,00035*3} = 100255,3$ руб.

Через 2 дня:

$S = 100255,3 * e^{0,0004*2} = 100335,6$ руб.

Таким образом, сумма погасительного платежа равна 100355,6 руб.

Задача 67

На трехмесячный депозит положена сумма под простую годовую ставку 18%. Но за эти три месяца темп инфляции оказался на уровне 22% в год. Какова реальная ставка процентов? При какой ставке можно было бы сохранить реальную стоимость первоначального капитала?

Решение:

Реальная процентная ставка — это процентная ставка, очищенная от инфляции. Реальная ставка процента определяется по формуле:

$$i_{\text{р}} = \frac{1+i_{\text{н}}}{1+\pi} - 1,\text{ где}$$

iн – номинальная ставка;

π – темп инфляции.

Тогда:

$$i_{\text{р}} = \frac{1+0{,}18}{1+0{,}22} - 1 = -3{,}3\%$$

Пусть $i_{\text{р}}$ = 18%. Тогда определим $i_{\text{н}}$:

$$i_{\text{н}} = (i_{\text{р}}+1)(1+\pi) - 1 = (1+0{,}18)(1+0{,}22) - 1 = 0{,}44 = 44\%$$

Следовательно, реальную стоимость первоначального капитала можно было бы сохранить при ставке 44%.

Задача 77.

Годовая сложная процентная ставка равна 17%. Определите эквивалентную сложную учетную процентную ставку.

Решение:

Соотношение ставок имеет вид:

$$(1+i)^n = \frac{1}{(1-d)^n}$$

Отсюда учётная ставка:

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{0{,}17}{1+0{,}17} = 0{,}145 = 14{,}5\%$$

Эквивалентная сложная учётная ставка равна 14,5%.

Задача 87.

Объедините три платежа:

150 000 руб. со сроком 3 марта,

100 000 руб. со сроком 1 августа,

50 000 руб. со сроком 1 октября.

Срок консолидированного платежа 1 июля, годовая ставка простых процентов 18%, временная база 365.

Решение:

Известно, что срок n_0 находится внутри ряда n_1, n_2,…,n_m, т.е. $n_1 < n_0 < n_m$. Пронумеруем платежи в интервале от n_1 до n_0 по j (FV_j, n_j), а в интервале от n_0 до n_m по к ($FV_к$, $n_к$). Тогда, разница в сроках определяется $t_j = n_0 - n_j$, $t_k=n_k-n_0$. далее необходимо привести все платежи к единой временной точке. Возьмем в качестве такой точки время уплаты консолидированного платежа. Тогда:

$$S = \sum S_j * (1 + t_j * i) + \sum S_k * (1 + t_k * i)^{-1}$$

Первое слагаемое характеризует процессы наращения размеров платежей первоначальной серии, сроки уплаты которого должны наступить раньше срока консолидированного платежа.

Второе слагаемее выражает процессы дисконтирования размеров платежей, сроки которого наступают позже сроков консолидированного платежа.

Известно, что n_1 = (31 – 3) + 30 + 31 + 30 + 1 = 120 дней, n_2 = 31 день, а n_3 = 31 + 31 + 30 = 92 дня. Тогда:

S = 150000*(1 + 120/365*0,18) + 100000*(1 + 31/365*0,18)$^{-1}$ + 50000*(1 + 92/365*0,18)$^{-1}$ = 158876,7 руб.

Таким образом, сумма заменяющего платежа равна 158876,7 руб.

Задача 93

Инвестиции производятся на протяжении 4 лет один раз в конце года по 2 млн. руб. Ставка сложных процентов 17% годовых. Найти сумму инвестиций к концу срока.

Решение:

Наращенная сумма ренты определяется по формуле:

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$, где

R – ежегодный платёж.

Тогда:

$$S = 2 \cdot \frac{(1+0{,}17)^4 - 1}{0{,}17} = 10{,}28 \text{ млн. руб.}$$

Следовательно, сумма инвестиций к концу срока равна 10,28 млн. руб.

Задача 94.

Найти наращенную сумму годовой ренты, если проценты начисляются по номинальной ставке 16% ежемесячно, член ренты 50 000 руб., срок ренты 4 года.

Решение:

Наращенная сумма ренты с годовым периодом (p = 1) платежей членов ренты R и начислением сложных процентов m раз в году (m > 1) по номинальной процентной ставке j определяется по формуле:

$$S = R \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1} = 50000 \cdot \frac{\left(1+\frac{0,16}{12}\right)^{12 \cdot 4} - 1}{\left(1+\frac{0,16}{12}\right)^{12} - 1} = 257872,3 \text{ руб.}$$

Таким образом, наращенная сумма годовой ренты при заданных условиях составляет 257872,3 руб.

Задача 95.

Для формирования фонда ежеквартально делаются взносы по 100 000 руб., проценты начисляются один раз в год по ставке 17%. Найти величину накопленного фонда к концу пятилетнего срока.

Решение:

Наращенная сумма P – срочной ренты с годовыми платежами R и с начислением сложных процентов один раз в году (m = 1) по процентной ставке i определяется по формуле:

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{1/p} - 1} = 100000 \cdot \frac{(1+0,17)^5 - 1}{(1+0,17)^{1/4} - 1} = 2978779 \text{ руб.}$$

Следовательно, величина накопленного фонда к концу срока составляет 2978779 руб.

Задача 96.

Для формирования фонда ежеквартально делаются взносы по 100 000 руб., проценты начисляются ежемесячно по номинальной ставке 17%. Найти величину накопленного фонда к концу пятилетнего срока. Полученную сумму сравните с результатом предыдущей задачи.

Решение:

Наращенную сумму ренты определим по формуле:

$$S=\frac{R}{p}\cdot\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\cdot n}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1}=100000\cdot\frac{\left(1+\frac{0{,}17}{12}\right)^{12\cdot5}-1}{\left(1+\frac{0{,}17}{12}\right)^{12/4}-1}=3075596 \text{ руб.}$$

Таким образом, чем чаще начисляются проценты, тем больше накопленная сумма ренты.

Задача 97.

Инвестиции производятся на протяжении 4 лет один раз в конце года по 2 млн. руб. Ставка сложных процентов 17% годовых. Найти современную стоимость инвестиций.

Решение:

Рассчитаем текущую стоимость ренты:

$$A=R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=2\cdot\frac{1-(1+0{,}17)^{-4}}{0{,}17}=5{,}49 \text{ млн. руб.}$$

Следовательно, современная стоимость инвестиций составляет 5,49 млн. руб.

Задача 98

Найти современную стоимость годовой ренты, если проценты начисляются по номинальной ставке 16% ежемесячно, член ренты 50 000 руб., срок ренты 4 года.

Решение:

Современную стоимость ренты рассчитаем по формуле:

$$A=R\cdot\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot n}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}=50000\cdot\frac{1-\left(1+\frac{0{,}16}{12}\right)^{-12\cdot4}}{\left(1+\frac{0{,}16}{12}\right)^{12}-1}=136550{,}4 \text{ руб.}$$

Таким образом, современная стоимость годовой ренты при заданных условиях равна 136550,4 руб.

Задача 99.

Для формирования фонда ежеквартально делаются взносы по 100 000 руб., проценты начисляются один раз в год по ставке 17%. Найти современную стоимость фонда, который будет накоплен к концу пятилетнего срока.

Решение:

Современную стоимость ренты рассчитаем по формуле:

$$A=\frac{R}{p}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1}=100000\cdot\frac{1-(1+0{,}17)^{-5}}{(1+0{,}17)^{1/4}-1}=1358654 \text{ руб.}$$

Следовательно, современная стоимость фонда равна 1358654 руб.

Задача 100

Для формирования фонда ежеквартально делаются взносы по 100 000 руб., Проценты начисляются ежемесячно по номинальной ставке 17%. Найти современную стоимость фонда, накопленного к концу пятилетнего срока. Полученную сумму сравните с результатом предыдущей задачи.

Решение:

Современную стоимость ренты определим по формуле:

$$A=\frac{R}{p}\cdot\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot n}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1}=100000\cdot\frac{1-\left(1+\frac{0{,}17}{12}\right)^{-12\cdot 5}}{\left(1+\frac{0{,}17}{12}\right)^{12/4}-1}=1322420 \text{ руб.}$$

Таким образом, чем чаще начисляются проценты, тем меньше современная сумма ренты при прочих равных условиях.

Задача 101.

Определите размер равных ежегодных взносов, которые необходимо делать для погашения долга через 3 года в размере 1 млн. руб., если ставка сложных процентов 17% годовых.

Решение:

Определим размер платежа ренты:

$$R=S/\frac{(1+i)^n-1}{i}=1000/\frac{(1+0{,}17)^3-1}{0{,}17}=282{,}57 \text{ тыс. руб.}$$

Следовательно, размер равных ежегодных взносов должен составлять 282,57 тыс. руб.

Задача 102.

Определите размер равных ежегодных взносов, которые необходимо делать для погашения в течение 3 лет текущего долга в размере 1 млн. руб., если ставка сложных процентов 17% годовых.

Решение:

Определим размер платежа ренты:

$$R = A / \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 1000 / \frac{1-(1+0{,}17)^{-3}}{0{,}17} = 452{,}57 \text{ тыс. руб.}$$

Следовательно, размер равных ежегодных взносов должен составлять 452,57 тыс. руб.

Задача 103.

За счет привлеченных средств сделаны инвестиции в размере 10 млн. руб., расчетная отдача от них составляет по 2,2 млн. руб. в конце каждого года. За какой срок окупятся инвестиции, если на долг начисляются проценты по квартальной ставке 4%?

Решение:

Дисконтированный срок окупаемости – это срок окупаемости инвестиций ($T_{ок}$) с учетом временного аспекта:

$DT_{ок}$ = min n, при котором $\sum_{i=1}^{n} \frac{CF_i}{(1+r)^i} \geq I_0$, где

CF – ежегодный денежный поток;

r – ставка процента;

I_0 – первоначальные инвестиции.

Расчёты проведём в таблице:

Год (i)	$\frac{2{,}2}{(1+0{,}04)^{i*4}}$	$\sum_{i=1}^{n} \frac{2{,}2}{(1+0{,}04)^{i*4}} - 10$
1	1,880569	-8,11943
2	1,607518	-6,51191
3	1,374114	-5,1378
4	1,174598	-3,9632
5	1,004051	-2,95915

6	0,858267	-2,10088
7	0,73365	-1,36723
8	0,627127	-0,7401
9	0,536071	-0,20403
10	0,458236	0,254203

Таким образом, инвестиции окупятся за 10 лет.

Задача 104

При какой минимальной ставке процентов удастся за 5 лет создать фонд в 1 млн. руб., если ежемесячные взносы планируются в размере 10 тыс. руб. Задачу решить методом линейной интерполяции.

Решение:

Интерполяция - в математике и статистике это способ вычислить промежуточное значение функции по нескольким уже известным ее значениям. Например, имеется функция f(x), известны результаты значения f(x) в точке x_0 и точке x_2, интерполяция помогает найти значение $f(x_1)$ при условии что x_1 принадлежит интервалу от x_0 до x_2.

Пусть i_1 = 5%. Тогда:

$$S_1 = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{1/p} - 1} = 10 \cdot \frac{(1+0,05)^5 - 1}{(1+0,05)^{1/12} - 1} = 678,15 \text{ тыс. руб.}$$

Пусть i_2 = 50%. Тогда:

$$S_2 = 10 \cdot \frac{(1+0,5)^5 - 1}{(1+0,5)^{1/12} - 1} = 1918,68 \text{ тыс. руб.}$$

По методу линейной интерполяции рассчитаем процентную ставку i:

$$i = 0,05 + \frac{1000 - 678,15}{1918,68 - 678,15} * (0,5 - 0,05) = 0,167 = 16,7\%$$

Следовательно, минимальная ставка процента составляет 16,7%.

Задачи №106

Задан следующий денежный поток инвестиционного проекта (в тыс. руб.):

Годы	1	2	3	4	5

Суммы	-100	-200	50	200	200

Рассчитайте чистую приведенную стоимость (NPV) этого проекта, если ставка сравнения равна 15%, все суммы выплачиваются и поступают в конце года.

Решение:

Чистый дисконтированный доход проекта NPV рассчитывается по формуле:

$$NPV = \sum_{i=1}^{n} \frac{CF_i}{(1+r)^n} - I_0$$

CF – чистый денежный поток;

r – цена капитала;

n – период;

I_0 – первоначальные вложения.

Тогда:

$$NPV = \frac{-100}{1{,}15} + \frac{-200}{1{,}15^2} + \frac{50}{1{,}15^3} + \frac{200}{1{,}15^4} + \frac{200}{1{,}15^5} = -86{,}96 - 151{,}23 + 32{,}88 + 114{,}35 + 99{,}44$$

$NPV = -238{,}19 + 246{,}66 = 8{,}48$ тыс. руб.

Проект является эффективным, так как NPV > 0.

Задача 107

Найдите индекс рентабельности (PI) для инвестиционного проекта, денежный поток которого и ставка сравнения представлены в задаче 106. Дайте интерпретацию полученного результата.

Решение:

Индекс доходности определяется по формуле:

$$PI = \frac{NPV + I_0}{I_0} > 1$$

Тогда:

$$PI = \frac{246{,}66}{238{,}19} = 1{,}036 > 1$$

Следовательно, на каждый рубль инвестиций приходится 1,036 руб. отдачи.

Задача 108.

Определите внутреннюю норму доходности для проекта со следующим потоком платежей постнумерандо в тыс. руб.:

Годы					
1	2	3	4	5	6
-150	-250	100	150	150	150

Решение:

Внутренняя норма доходности (IRR) определяет максимально приемлемую ставку дисконта, при которой можно инвестировать средства без каких-либо потерь для собственника.

IRR определяется по формуле:

$$IRR = r_1 + \frac{NPV(r_1)}{NPV(r_1) - NPV(r_2)} * (r_2 - r_1)$$, где

r_1 - значение ставки, при котором функция положительна;

r_2 – значение ставки, при котором функция отрицательна.

Примем $r_1 = 5\%$, $r_2 = 50\%$.

Тогда:

$$NPV(r_1) = \frac{-150}{1{,}05^1} + \frac{-250}{1{,}05^2} + \frac{100}{1{,}05^3} + \frac{150}{1{,}05^4} + \frac{150}{1{,}05^5} + \frac{150}{1{,}05^6} = 69{,}64 \text{ тыс. руб.}$$

$$NPV(r_2) = \frac{-150}{1{,}5^1} + \frac{-250}{1{,}5^2} + \frac{100}{1{,}5^3} + \frac{150}{1{,}5^4} + \frac{150}{1{,}5^5} + \frac{150}{1{,}5^6} = -118{,}93 \text{ тыс. руб.}$$

$$IRR_1 = 0{,}05 + \frac{69{,}64}{69{,}64 + 118{,}93} * (0{,}5 - 0{,}05) = 0{,}216 = 21{,}6\%$$

Таким образом, максимально приемлемая ставка дисконта для проекта составляет 21,6%.