

Методы оптимальных решений

Контрольная работа с подробным решением

Задача 1

Определить методом множителей Лагранжа условные экстремумы функций:

$$Z = 3x^2 + 2y^2 - x + 1$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

Решение.

Составим функция Лагранжа.

$$L = 3x^2 + 2y^2 - x + 1 + \lambda(4 - x^2 - y^2)$$

Находим стационарные точки функции Лагранжа:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dx} = 6x - 1 - 2\lambda x = 0 \\ \frac{dL}{dy} = 4y - 2\lambda y = 0 \\ \frac{dL}{d\lambda} = 4 - x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

Из данной системы получаем:

$$x := 0 \quad y := 0 \quad \lambda := 0$$

Given

$$6x - 1 - 2 \cdot \lambda \cdot x = 0$$

$$4y - 2 \cdot \lambda \cdot y = 0$$

$$4 - x^2 - y^2 = 0$$

$$\text{Find}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2.75 \end{pmatrix}$$

Точка (2,0) – точка условного экстремума функции $Z = 3x^2 + 2y^2 - x + 1$.

Ответ: $x=2$, $y=0$, целевая функция имеет минимум $Z=11$ в этой точке.

Задача 2

Распределить $T=100$ ден. ед. по четырем предприятиям с целью получения максимальной прибыли. Значения прироста продукции в зависимости от вложенных средств заданы таблицей.

X	g1	g2	g3	g4
20	19	14	20	25
40	36	32	36	53
60	51	52	47	66
80	72	61	72	70
100	81	79	80	84

Решение.

I этап. Условная оптимизация

1-й шаг. $k=4$. Предполагаем, что все средства 100 ден. ед. переданы на инвестирование четвертого предприятия. В этом случае максимальная прибыль составит $F_3(C_3)=84$.

C_4	X_4						$F_4(C_4)$	X_4^*
	0	20	40	60	80	100		
0	0						0	0
20		25					25	20
40			53				53	40
60				66			66	60
80					70		70	80
100						84	84	100

2-й шаг. $k=3$. Определяем стратегию при инвестировании третьего и четвертого предприятия.

Рекуррентное соотношение Беллмана: $F_3(C_3) = \max \{g_3(x_3) + F_4(C_2 - x_2)\}$

C_3	X_3						$F_3(C_3)$	X_3^*
	0	20	40	60	80	100		
0	0+0						0	0
20	0+25	20+0					25	0
40	0+53	20+25	36+0				53	0
60	0+66	20+53	36+25	47+0			73	20
80	0+70	20+66	36+53	47+25	72+0		89	40
100	0+84	20+70	36+66	47+53	72+25	80+0	102	40

3-й шаг. $k=2$. Определяем стратегию при инвестировании второго -четвертого предприятия.

Рекуррентное соотношение Беллмана: $F_2(C_2) = \max \{g_2(x_2) + F_3(C_2 - x_2)\}$

C_2	X_2						$F_2(C_2)$	X_2^*
	0	20	40	60	80	100		
0	0+0						0	0
20	0+25	14+0					25	0

Контрольная работа по МОР выполнена на сайте www.matburo.ru
 Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу
 ©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

40	0+53	14+25	32+0				53	0
60	0+73 <	14+53	32+25	52+0			73	0
80	0+89	14+73	32+53	52+25	61+0		89	0
100	0+102	14+89	32+73	52+53	61+20	79+0	105	40

4-й шаг. $k=1$. Определяем стратегию при инвестировании первого -четвертого предприятия.

Рекуррентное соотношение Беллмана: $F_1(C_1) = \max \{g_1(x_1) + F_2(C_1 - x_1)\}$

C_1	X_1						$F_1(C_1)$	X_1^*
	0	20	40	60	80	100		
0	0+0						0	0
20	0+25	19+0					25	0
40	0+53	19+25	36+0				53	0
60	0+73	19+53	36+25	51+0			73	0
80	0+89	19+73	36+53	51+25	72+0		92	20
100	0+105	19+89	36+73 <	51+53	72+25	81+0	109	40

II этап. Безусловная оптимизация

По данным последней таблицы максимальный доход при распределении 100 ден. ед. между 4 предприятиями составляет $F_1(100) = 109$.

При этом первому предприятию нужно выделить $x_1 = 40$ ден. ед.

Далее возвращаясь по таблицам, находим средства, передаваемые другим предприятиям (ячейки выделены):

Второму первому предприятию нужно выделить $x_2 = 0$ ден. ед.

Третьему первому предприятию нужно выделить $x_3 = 20$ ден. ед.

Четвертому первому предприятию нужно выделить $x_4 = 40$ ден. ед.

Таким образом, оптимальный план инвестирования предприятий $X^* = (40, 0, 20, 40)$, обеспечивающий максимальный доход, равен

$F(100) = g_1(40) + g_2(0) + g_3(20) + g_4(40) = 36 + 0 + 20 + 53 = 109$ ден. ед.

Задача 3

Рассмотрим некоторое производство, которое описывается с помощью функции ПФКД. Основные фонды оцениваются в 50 млрд. руб., численность работников составляет 5000 человек. Средняя производительность труда $z=50000$ руб. Известно также, что для увеличения выпуска продукции на $\Delta y=2\%$ требуется увеличить стоимость фондов на $\Delta x_1=4\%$ или численность работников на $\Delta x_2=8\%$.

Требуется построить для данного предприятия производственную функцию, определив коэффициенты эластичности.

Решение.

Вид производственной функции: $y = AK^\alpha L^\beta$.

По исходным данным: $K=50$ млрд. руб., $L=5000$ человек.

Средняя производительность труда $= \frac{y}{5000} = 50000$, отсюда: $y = 0,25$ млрд. руб.

Получаем первое уравнение: $0,25 = A \cdot 50^\alpha \cdot 5000^\beta$

Запишем ПФКД в относительных приращениях:

$$\frac{\Delta y}{y} = \alpha \frac{\Delta K}{K} + \beta \frac{\Delta L}{L}$$

Подставляем:

$$0,02 = \alpha \cdot 0,04$$

$$0,02 = \beta \cdot 0,08$$

Откуда находим параметры:

$$\alpha = 0,5$$

$\beta = 0,25$ - это одновременно и коэффициенты эластичности.

Далее подставляем найденные параметры в первое полученное уравнение:

$$0,25 = A \cdot 50^{0,5} \cdot 5000^{0,25}$$

Теперь находим параметр A :

$$A = \frac{0,25}{50^{0,5} \cdot 5000^{0,25}} = 0,0042$$

Получаем функцию:

$$y = 0,0042 \cdot K^{0,5} \cdot L^{0,25}$$

Задача 4

Определить нижнюю и верхнюю цену игры и если возможно, седловую точку:

6	2	8	7
9	4	8	5
5	3	7	4

Решение.

Проверяем, имеет ли платежная матрица седловую точку. Если да, то выписываем решение игры в чистых стратегиях.

Игрок 1 выбирает свою стратегию так, чтобы получить максимальный свой выигрыш, а игрок 2 выбирает свою стратегию так, чтобы минимизировать выигрыш игрока I.

Игроки	B_1	B_2	B_3	B_4	$a = \min(A_i)$
A_1	6	2	8	7	2
A_2	9	4	8	5	4
A_3	5	3	7	4	3
$b = \max(B_j)$	9	4	8	7	

Находим гарантированный выигрыш, определяемый нижней ценой игры $a = \max(a_i) = 4$, которая указывает на максимальную чистую стратегию A_2 .

Верхняя цена игры $b = \min(b_j) = 4$.

Седловая точка (2, 2) указывает решение на пару альтернатив (A_2, B_2).

Цена игры равна 4.

Задача 5

Найти оптимальные решения игроков в смешанных стратегиях.

Игроки	B ₁	B ₂
A ₁	4	1
A ₂	2	4

Решение.

Проверяем, имеет ли платежная матрица седловую точку

Игроки	B ₁	B ₂	a = min(A _i)
A ₁	4	1	1
A ₂	2	4	2
b = max(B _j)	4	4	

Нижняя цена игры $a = \max(a_i) = 2$, которая указывает на максимальную чистую стратегию A₂.

Верхняя цена игры $b = \min(b_j) = 4$.

Что свидетельствует об отсутствии седловой точки, так как $a \neq b$, тогда цена игры находится в пределах $2 \leq y \leq 4$.

Находим решение игры в смешанных стратегиях.

Запишем систему уравнений.

Для игрока 1:

$$4p_1 + 2p_2 = y$$

$$p_1 + 4p_2 = y$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

Для игрока 2:

$$4q_1 + q_2 = y$$

$$2q_1 + 4q_2 = y$$

$$q_1 + q_2 = 1$$

Решая эти системы, находим:

$$y = 2\frac{4}{5}.$$

$$p_1 = \frac{2}{5} \text{ (вероятность применения 1-ой стратегии).}$$

$$p_2 = \frac{3}{5} \text{ (вероятность применения 2-ой стратегии).}$$

$$\text{Оптимальная смешанная стратегия игрока 1: } P = (\frac{2}{5}; \frac{3}{5}).$$

$$q_1 = \frac{3}{5} \text{ (вероятность применения 1-ой стратегии).}$$

$$q_2 = \frac{2}{5} \text{ (вероятность применения 2-ой стратегии).}$$

$$\text{Оптимальная смешанная стратегия игрока 2: } Q = (\frac{3}{5}; \frac{2}{5}).$$

$$\text{Цена игры: } y = 2\frac{4}{5}.$$

Задача 6

На рынке представлены модели летних шин для автомобиля. Характеристики шин, учитывая тормозной путь, надежность управления на прямой и на поворотах, поперечное сцепление, цену и др., представлены следующими частными критериями.

Необходимо выбрать модель шин.

Модели шин	Эксперты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Barum Bravurus	9	9	8	9	8	8	7	7	6	9
Continental PC	9	8	8	10	10	10	10	9	8	9
Danlop SP	8	8	7	6	6	6	9	8	8	5
Goodyear EV	9	9	10	10	10	9	7	8	10	7
Michelin Energy	9	7	6	9	8	7	9	9	10	7
Nokian NRH2	8	8	7	10	9	7	9	9	8	6
Pirelli P6	10	8	8	8	9	10	8	10	10	9

Решение.

Критерий Лапласа.

Мнения экспертов равнозначны: $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 1/n = 1/10$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum(a_{ij})$
Barum Bravurus	0,9	0,9	0,8	0,9	0,8	0,8	0,7	0,7	0,6	0,9	8
Continental PC	0,9	0,8	0,8	1	1	1	1	0,9	0,8	0,9	9,1
Danlop SP	0,8	0,8	0,7	0,6	0,6	0,6	0,9	0,8	0,8	0,5	7,1
Goodyear EV	0,9	0,9	1	1	1	0,9	0,7	0,8	1	0,7	8,9
Michelin Energy	0,9	0,7	0,6	0,9	0,8	0,7	0,9	0,9	1	0,7	8,1
Nokian NRH2	0,8	0,8	0,7	1	0,9	0,7	0,9	0,9	0,8	0,6	8,1
Pirelli P6	1	0,8	0,8	0,8	0,9	1	0,8	1	1	0,9	9
значимость	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	

Выбираем из (8; 9,1; 7,1; 8,9; 8,1; 8,1; 9) максимальный элемент $\max=9,1$.

Вывод: выбираем шины Continental PC.

Критерий Вальда.

По критерию Вальда за оптимальную принимается чистая стратегия, которая в наилучших условиях гарантирует максимальный выигрыш, т.е.

$a = \max(\min a_{ij})$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\min(a_{ij})$
Barum Bravurus	9	9	8	9	8	8	7	7	6	9	6

Контрольная работа по МОР выполнена на сайте www.matburo.ru
 Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу
 ©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Continental PC	9	8	8	10	10	10	10	9	8	9	8
Danlop SP	8	8	7	6	6	6	9	8	8	5	5
Goodyear EV	9	9	10	10	10	9	7	8	10	7	7
Michelin Energy	9	7	6	9	8	7	9	9	10	7	6
Nokian NRH2	8	8	7	10	9	7	9	9	8	6	6
Pirelli P6	10	8	8	8	9	10	8	10	10	9	8

Выбираем из (6; 8; 5; 7; 6; 6; 8) максимальный элемент $\max=8$.

Вывод: выбираем шины Continental PC или Pirelli P6.

Критерий Севиджа.

Находим матрицу рисков.

1. Рассчитываем 1-й столбец матрицы рисков.

$$r_{11} = 10 - 9 = 1; r_{21} = 10 - 9 = 1; r_{31} = 10 - 8 = 2; r_{41} = 10 - 9 = 1; r_{51} = 10 - 9 = 1; r_{61} = 10 - 8 = 2; r_{71} = 10 - 10 = 0;$$

2. Рассчитываем 2-й столбец матрицы рисков.

$$r_{12} = 9 - 9 = 0; r_{22} = 9 - 8 = 1; r_{32} = 9 - 8 = 1; r_{42} = 9 - 9 = 0; r_{52} = 9 - 7 = 2; r_{62} = 9 - 8 = 1; r_{72} = 9 - 8 = 1;$$

3. Рассчитываем 3-й столбец матрицы рисков.

$$r_{13} = 10 - 8 = 2; r_{23} = 10 - 8 = 2; r_{33} = 10 - 7 = 3; r_{43} = 10 - 10 = 0; r_{53} = 10 - 6 = 4; r_{63} = 10 - 7 = 3; r_{73} = 10 - 8 = 2;$$

4. Рассчитываем 4-й столбец матрицы рисков.

$$r_{14} = 10 - 9 = 1; r_{24} = 10 - 10 = 0; r_{34} = 10 - 6 = 4; r_{44} = 10 - 10 = 0; r_{54} = 10 - 9 = 1; r_{64} = 10 - 10 = 0; r_{74} = 10 - 8 = 2;$$

5. Рассчитываем 5-й столбец матрицы рисков.

$$r_{15} = 10 - 8 = 2; r_{25} = 10 - 10 = 0; r_{35} = 10 - 6 = 4; r_{45} = 10 - 10 = 0; r_{55} = 10 - 8 = 2; r_{65} = 10 - 9 = 1; r_{75} = 10 - 9 = 1;$$

6. Рассчитываем 6-й столбец матрицы рисков.

$$r_{16} = 10 - 8 = 2; r_{26} = 10 - 10 = 0; r_{36} = 10 - 6 = 4; r_{46} = 10 - 9 = 1; r_{56} = 10 - 7 = 3; r_{66} = 10 - 7 = 3; r_{76} = 10 - 10 = 0;$$

7. Рассчитываем 7-й столбец матрицы рисков.

$$r_{17} = 10 - 7 = 3; r_{27} = 10 - 10 = 0; r_{37} = 10 - 9 = 1; r_{47} = 10 - 7 = 3; r_{57} = 10 - 9 = 1; r_{67} = 10 - 9 = 1; r_{77} = 10 - 8 = 2;$$

8. Рассчитываем 8-й столбец матрицы рисков.

$$r_{18} = 10 - 7 = 3; r_{28} = 10 - 9 = 1; r_{38} = 10 - 8 = 2; r_{48} = 10 - 8 = 2; r_{58} = 10 - 9 = 1; r_{68} = 10 - 9 = 1; r_{78} = 10 - 10 = 0;$$

9. Рассчитываем 9-й столбец матрицы рисков.

$$r_{19} = 10 - 6 = 4; r_{29} = 10 - 8 = 2; r_{39} = 10 - 8 = 2; r_{49} = 10 - 10 = 0; r_{59} = 10 - 10 = 0; r_{69} = 10 - 8 = 2; r_{79} = 10 - 10 = 0;$$

10. Рассчитываем 10-й столбец матрицы рисков.

$$r_{110} = 9 - 9 = 0; r_{210} = 9 - 9 = 0; r_{310} = 9 - 5 = 4; r_{410} = 9 - 7 = 2; r_{510} = 9 - 7 = 2; r_{610} = 9 - 6 = 3; r_{710} = 9 - 9 = 0;$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\max(a_{ij})$
Barum Bravurus	1	0	2	1	2	2	3	3	4	0	4
Continental PC	1	1	2	0	0	0	0	1	2	0	2
Danlop SP	2	1	3	4	4	4	1	2	2	4	4
Goodyear EV	1	0	0	0	0	1	3	2	0	2	3
Michelin Energy	1	2	4	1	2	3	1	1	0	2	4
Nokian NRH2	2	1	3	0	1	3	1	1	2	3	3

Контрольная работа по МОР выполнена на сайте www.matbuero.ru
 Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу
 ©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Pirelli P6	0	1	2	2	1	0	2	0	0	0	2
------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Выбираем из (4; 2; 4; 3; 4; 3; 2) минимальный элемент $\min=2$.

Вывод: выбираем шины Continental PC или Pirelli P6.

Критерий Гурвица.

Критерий Гурвица является критерием пессимизма - оптимизма. За оптимальную принимается та стратегия, для которой выполняется соотношение: $\max(s_i)$, где $s_i = y \cdot \min(a_{ij}) + (1-y) \cdot \max(a_{ij})$

Рассчитываем s_i .

$$s_1 = 0,5 \cdot 6 + (1-0,5) \cdot 9 = 7,5$$

$$s_2 = 0,5 \cdot 8 + (1-0,5) \cdot 10 = 9$$

$$s_3 = 0,5 \cdot 5 + (1-0,5) \cdot 9 = 7$$

$$s_4 = 0,5 \cdot 7 + (1-0,5) \cdot 10 = 8,5$$

$$s_5 = 0,5 \cdot 6 + (1-0,5) \cdot 10 = 8$$

$$s_6 = 0,5 \cdot 6 + (1-0,5) \cdot 10 = 8$$

$$s_7 = 0,5 \cdot 8 + (1-0,5) \cdot 10 = 9$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\min(a_{ij})$	$\max(a_{ij})$	$y \cdot \min(a_{ij}) + (1-y) \cdot \max(a_{ij})$
Barum Bravurus	9	9	8	9	8	8	7	7	6	9	6	9	7,5
Continental PC	9	8	8	10	10	10	10	9	8	9	8	10	9
Danlop SP	8	8	7	6	6	6	9	8	8	5	5	9	7
Goodyear EV	9	9	10	10	10	9	7	8	10	7	7	10	8,5
Michelin Energy	9	7	6	9	8	7	9	9	10	7	6	10	8
Nokian NRH2	8	8	7	10	9	7	9	9	8	6	6	10	8
Pirelli P6	10	8	8	8	9	10	8	10	10	9	8	10	9

Выбираем из (7,5; 9; 7; 8,5; 8; 8; 9) максимальный элемент $\max=9$.

Вывод: выбираем шины Continental PC или Pirelli P6.

Таким образом, в результате решения статистической игры по различным критериям чаще других рекомендовались шины Continental PC? совсем немного (0,1) им уступают Pirelli P6.