Задачи с решением по предмету «Теория принятия решений»

Задача 1. Компания «Луч» получает переключатели у двух поставщиков. Качество переключателей охарактеризовано в следующей таблице:

Процент брака	Вероятность для поставщика	
	A	*B*
1	0,7	*0,3*
2	0,2	0,4
3	0,1	0,3

Так, 1% всех переключателей, поставляемых поставщиком *A*, с вероятностью 0,7 окажется бракованным. Так как каждый заказ компании составляет 10 000 переключателей, это означает, что с вероятностью 0,7 они получат от этого поставщика 100 бракованных переключателей. Бракованный переключатель можно отремонтировать за 0,5 тыс. руб. Качество у поставщика *B* ниже, поэтому он уступает партию в 10 000 переключателей на 37 тыс. руб. дешевле, чем поставщик *A*. Какого поставщика следует выбрать компании? Какова ожидаемая стоимостная оценка наилучшего решения?

Решение. Подсчитаем для каждого поставщика среднее ожидаемое количество бракованных деталей в партии.

Рассмотрим поставщика А. Введем формально гипотезы:
H_1 = (Деталь с процентом брака 1%),
H_2 = (Деталь с процентом брака 2%),
H_3 = (Деталь с процентом брака 3%),
по условию известно, что (см. второй столбец таблицы):
$P(H_1)=0,7,\ P(H_2)=0,2,\ P(H_3)=0,1$.
Введем событие X_A = (Деталь от поставщика A бракованная). Известно, что
$P(X_A|H_1)=1\%=0,01$, $P(X_A|H_2)=2\%=0,02$, $P(X_A|H_3)=3\%=0,03$.
Тогда по формуле полной вероятности:
$P_A=P(X_A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(X_A|H_i)=0,7\cdot 0,01+0,2\cdot 0,02+0,1\cdot 0,03=0,014$ или 1,4% бракованных деталей в среднем дает поставщик А.

Аналогичные подсчеты проведем для поставщика В.
H_1 = (Деталь с процентом брака 1%),
H_2 = (Деталь с процентом брака 2%),
H_3 = (Деталь с процентом брака 3%),
по условию известно, что (см. третий столбец таблицы):
$P(H_1)=0,3,\ P(H_2)=0,4,\ P(H_3)=0,3$.
Введем событие X_B = (Деталь от поставщика B бракованная). Известно, что
$P(X_B|H_1)=1\%=0,01$, $P(X_B|H_2)=2\%=0,02$, $P(X_B|H_3)=3\%=0,03$.

Тогда по формуле полной вероятности:
$P_B = P(X_B) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i) P(X_B \mid H_i) = 0,3 \cdot 0,01 + 0,4 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,03 = 0,02$ или 2% бракованных деталей в среднем дает поставщик В.

Теперь возвращаемся к задаче. Рассмотрим варианты покупки одной партии деталей в 10000 штук у поставщика А и В.

Для удобства внесем расчеты в таблицу, стоимость указываем в тыс.рублей.

	A	B
Покупаем деталей	10000	10000
Скидка от цены	0	37
Вероятность брака	0,014	0,02
В среднем бракованных деталей	140	200
Стоимость ремонта	70	100
Итого с учетом ремонта и скидки	**-70**	**-63**

Среднее число бракованных деталей находим как произведение вероятности на число деталей в партии (например, для А $10000 \cdot P_A = 10000 \cdot 0,014 = 140$ деталей), стоимость ремонта – как произведение числа бракованных деталей на цену ремонта одной детали (например, для А $140 \cdot 0,5 = 70$ тыс. рублей).

Итого получаем, что ремонт бракованных деталей выходит дороже для партии от поставщика В (70 тыс. против 100 тыс. рублей), но за счет скидки 37 тыс. рублей, общие затраты фирмы меньше (70 тыс. против 63 тыс. рублей).

Итак, следует выбрать поставщика В, выигрыш в стоимостном выражении составит 7 тысяч рублей на партию в 10000 деталей.

Задача 2.
Таблица содержит данные, иллюстрирующие задачу выбора места для первой

Факторы	Веса факторов	Парковая зона	Городской центр	Район гребного канала	Район авто станции
Доступность для пациентов	W1	9	7	5	7
Арендная плата		6	10	7	3
Конспиративность	W3	5	2	6	7
Удобство персонала	W4	3	6	4	2
Экология	W_5	9	4	8	3
Перспектива расширения	W6	5	4	7	6
Реакция населения	W_7	2	4	7	6

Где лучше всего расположить центр?
Веса факторов (по вариантам) представлены в следующей таблице

W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7
4	7	5	5	4	7	6

Решение. Поскольку явно в задаче указаний нет, как оцениваются факторы и их привлекательность, считаем следующим образом:
Показатели: доступность, конспиративность, удобство персонала, экология, перспектива расширения, реакция населения – максимизируем.
Показатели: арендная плата – минимизируем.

Проводим нормализацию показателей альтернатив по критериям. Транспонируем матрицу из условия, чтобы критерии записывались по столбцам:

9	6	5	3	9	5	2
7	10	2	6	4	4	4
5	7	6	4	8	7	7
7	3	7	2	3	6	6

Теория:

Предположим, что имеется *n* альтернатив и *к* критериев. Обозначим U_{ij} - оценку i-й альтернативы по *j-му* критерию. Пусть оценки альтернатив по критериям имеют различные размерности. Введем обозначение $U_j^{\max}$ = max(U_{ij}) - максимальное значение j-го критерия по каждой альтернативе, а $U_j^{\min}$. = min(U_{ij}.) - минимальное значение j-го критерия по альтернативам. Тогда введем нормализованные оценки альтернатив по критериям.

В случае максимизации критериев (чем больше показатель, тем лучше) из каждого элемента столбца матрицы U_{ij} вычитают минимальный элемент данного столбца и результат делится на разницу между максимальным и минимальным элементами этого столбца:

$$u_{ij} = \frac{U_{ij} - \breve{U}_j}{\hat{U}_j - \breve{U}_j}$$

В случае минимизации критериев (чем меньше показатель, тем лучше), нормализованные оценки равны:

$$u_{ij} = \frac{\hat{U}_{ij} - U_{ij}}{\hat{U}_j - \breve{U}_j}$$

то есть из максимального элемента каждого столбца матрицы U_{ij} вычитают каждый элемент этого столбца и результат делится на разницу между максимальным и минимальным элементами столбца.

Для первого критерия (доступность для пациентов), который максимизируется, максимальный элемент равен 9, минимальный 5. Получаем, что $u_{i1} = \frac{U_{i1} - 5}{9-5} = \frac{U_{i1} - 5}{4}$

Для второго критерия (арендная плата), который минимизируется, максимальный элемент равен 10, минимальный 3. Получаем, что $u_{i2} = \frac{10 - U_{i2}}{10-3} = \frac{10 - U_{i2}}{7}$.

Аналогично продолжаем дальше:

$$u_{i3} = \frac{U_{i3} - 2}{7-2} = \frac{U_{i3} - 2}{5},$$

$$u_{i4} = \frac{U_{i4} - 2}{6-2} = \frac{U_{i4} - 2}{4},$$

$$u_{i5} = \frac{U_{i5} - 3}{9-3} = \frac{U_{i5} - 3}{6},$$

$$u_{i6} = \frac{U_{i6} - 4}{7-4} = \frac{U_{i6} - 4}{3},$$

$$u_{i7} = \frac{U_{i7} - 2}{7-2} = \frac{U_{i7} - 2}{5}.$$

В итоге получаем следующую матрицу нормализованных критериев:

1,00	0,57	0,60	0,25	1,00	0,33	0,00
0,50	0,00	0,00	1,00	0,17	0,00	0,40
0,00	0,43	0,80	0,50	0,83	1,00	1,00
0,50	1,00	1,00	0,00	0,00	0,67	0,80

Далее вычисляем функцию полезности для каждой альтернативы (строки), учитывая заданные веса w_j: $F_i = \sum_{j=1}^{k} u_{ij} \cdot w_j$, $i = 1,...,n$.

Получаем, например, для первой альтернативы (парковая зона):
$F_1 = 1 \cdot 4 + 0,57 \cdot 7 + 0,60 \cdot 5 + 0,25 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 0,33 \cdot 7 + 0 \cdot 6 = 18,58$.

Аналогично находим далее остальные значения:
$F_2 = 10,07$,
$F_3 = 25,83$,
$F_4 = 23,47$.

Выбираем альтернативу, для которой функция полезности максимальна:
$\max\limits_{i=1...,n} \{F_i\} = \max\{18,58; 10,07; 25,83; 23,47\} = 25,83$.

В нашем случае это третья альтернатива (район гребного канала).

Нужно выбрать район гребного канала.