Контрольная работа по высшей математике

1 курс

Темы: пределы, производные, интегралы

Сложность: простая

Найти следующие пределы.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+2x)^3-8x^3}{(1+2x)^2+4x}$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(1+2x)^3-8x^3}{(1+2x)^2+4x}=\left(\frac{\infty-\infty}{\infty+\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+6x+12x^2+8x^3-8x^3}{1+4x+4x^2+4x}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+6x+12x^2}{1+8x+4x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

Получили неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Делим числитель и знаменатель на старшую степень x^2. Получим:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x^2+6/x+12}{1/x^2+8/x+4}=\left(\frac{0+0+12}{0+0+4}\right)=\frac{12}{4}=3.$$

Ответ: 3

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 2x}$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-5x}{\sin 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}(3x-5)=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\frac{1}{2}(3x-5)=$$

Используем первый замечательный предел: $\frac{\sin t}{t}\to 1,\ t\to 0$. Получим:

$$=\lim_{x\to 0}1\frac{1}{2}(3x-5)=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}(3x-5)=\frac{1}{2}(0-5)=-\frac{5}{2}=-2,5.$$

Ответ: -2,5

Найти производные функций, заданных в явном и неявном виде.

a) $y=(\ln x)^{\lg^3 x}$;

Решение. Используем логарифмическую производную.

$$y'=y\cdot(\ln y)'=(\ln x)^{\lg^3 x}\cdot\left(\ln\left((\ln x)^{\lg^3 x}\right)\right)'=(\ln x)^{\lg^3 x}\cdot\left(\lg^3 x\cdot\ln(\ln x)\right)'=$$

$$=(\ln x)^{\lg^3 x}\cdot\left(\left(\lg^3 x\right)'\cdot\ln(\ln x)+\lg^3 x\cdot(\ln(\ln x))'\right)=$$

$$=(\ln x)^{\lg^3 x}\cdot\left(3\lg^2 x(\lg x)'\cdot\ln(\ln x)+\lg^3 x\cdot\frac{1}{\ln x}(\ln x)'\right)=$$

$$=(\ln x)^{\lg^3 x}\cdot\left(3\lg^2 x\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 10}\cdot\ln(\ln x)+\lg^3 x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\right)=$$

$$=(\ln x)^{\lg^3 x}\cdot\frac{\lg^2 x}{x}\left(\frac{3}{\ln 10}\cdot\ln(\ln x)+\frac{\lg x}{\ln x}\right).$$

Ответ: $y'=(\ln x)^{\lg^3 x}\cdot\frac{\lg^2 x}{x}\left(\frac{3}{\ln 10}\cdot\ln(\ln x)+\frac{\lg x}{\ln x}\right)$.

b) $\frac{x^2-1}{y^2-1}=x^3y^2$.

Решение. Берем производную от правой и левой части и выражаем y'.

Получаем:

$$\left(\frac{x^2-1}{y^2-1}\right)' = \left(x^3y^2\right)',$$

$$\left(\left(x^2-1\right)'\frac{1}{y^2-1}+\left(x^2-1\right)\left(\frac{1}{y^2-1}\right)'\right) = \left(x^3\right)'y^2+x^3\left(y^2\right)',$$

$$2x\frac{1}{y^2-1}+\left(x^2-1\right)\left(-\frac{1}{\left(y^2-1\right)^2}\right)\left(y^2-1\right)' = 3x^2y^2+x^3\cdot 2y\left(y\right)',$$

$$2x\frac{1}{y^2-1}-\frac{\left(x^2-1\right)}{\left(y^2-1\right)^2}2y\cdot y' = 3x^2y^2+x^3\cdot 2y\cdot y',$$

$$\frac{2x}{y^2-1}-3x^2y^2 = \left(x^3+\frac{\left(x^2-1\right)}{\left(y^2-1\right)^2}\right)2y\cdot y',$$

$$y' = \frac{\dfrac{2x}{y^2-1}-3x^2y^2}{\left(x^3+\dfrac{\left(x^2-1\right)}{\left(y^2-1\right)^2}\right)2y},$$

$$y' = \frac{\left(2x-3x^2y^2\left(y^2-1\right)\right)\left(y^2-1\right)}{\left(x^3\left(y^2-1\right)^2+\left(x^2-1\right)\right)2y}.$$

Ответ: $y' = \dfrac{\left(2x-3x^2y^2\left(y^2-1\right)\right)\left(y^2-1\right)}{\left(x^3\left(y^2-1\right)^2+\left(x^2-1\right)\right)2y}$.

Вычислить неопределенные интегралы.

$$\int\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$$

Решение. Выделим целую и дробную часть подынтегрального выражения:

$$\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}=\frac{5\left(x^3-5x^2+4x\right)+25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x}=5+\frac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x}.$$

Разложим полученную дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x}=\frac{25x^2-20x+2}{x\left(x^2-5x+4\right)}=\frac{25x^2-20x+2}{x\left(x-1\right)\left(x-4\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-4},$$

$$25x^2-20x+2=A\left(x-1\right)\left(x-4\right)+Bx\left(x-4\right)+Cx\left(x-1\right).$$

Положим $x=0$, тогда $2=4A,\ A=1/2$.

Положим $x=1$, тогда $25-20+2=-3B,\ B=-7/3$.

Положим $x=4$, тогда $400-80+2=12C,\ C=161/6$.

Получаем:

$$\int\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx=\int\left[5+\frac{1}{2}\frac{1}{x}-\frac{7}{3}\frac{1}{x-1}+\frac{161}{6}\frac{1}{x-4}\right]dx=$$
$$=5x+\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{7}{3}\ln|x-1|+\frac{161}{6}\ln|x-4|+C.$$

Ответ: $5x+\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{7}{3}\ln|x-1|+\frac{161}{6}\ln|x-4|+C$