Контрольная работа
Высшая математика. 2 курс
Уровень сложности: средний

Задание 1. Найти уравнение нормали, касательной плоскости и производную по направлению *l=(2,3)* функции $z = x^3 - 3xy + xy^2 - 1$ в точке P(1,1).

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y + y^2; \frac{\partial z}{\partial y} = -3x + 2xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}|_P = 1; \frac{\partial z}{\partial y}|_P = -1$$

$$z(P) = -2$$

Тогда, уравнение нормали есть $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$

Уравнение нормальной плоскости

$$1(x-1) - (y-1) = z+2$$

$$x - 1 - y + 1 - z - 2 = 0$$

$$x - y - z - 2 = 0$$

$$\left|\overline{l}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\overline{n} = \frac{\overline{l}}{\left|\overline{l}\right|} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}; \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \overline{l}}|_P = 1*\frac{2}{\sqrt{13}} - 1*\frac{3}{\sqrt{13}} = -\frac{1}{\sqrt{13}}$$

Задание 2. Определить стационарные точки и исследовать их на экстремум
$u = e^{x-y}(x^2 - 2y)$

Решение.

Найдем частные производные первого порядка и приравняем их к 0.

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = e^{x-y}(x^2-2y) + 2xe^{x-y} = 0 \\ \dfrac{dx}{dy} = -e^{x-y}(x^2-2y) - 2e^{x-y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x-y}(x^2-2y) + 2xe^{x-y} = 0 \\ -e^{x-y}(x^2-2y) - 2e^{x-y} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2y + 2x = 0 \\ -\left(x^2-2y\right) - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2y + 2x = 0 \\ 2x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1^2 - 2y + 2*1 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

Проверим, является ли полученная точка точкой минимума или максимума. Найдем производные второго порядка.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x-y}(x^2-2y) + 2xe^{x-y} = e^{x-y}\left(x^2 - 2y + 2x\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -e^{x-y}(x^2-2y) - 2e^{x-y} = e^{x-y}\left(-x^2 + 2y + 2\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x-y}\left(x^2 - 2y + 2x\right) + e^{x-y}\left(2x+2\right) = e^{x-y}\left(x^2 - 2y + 2x + 2x + 2\right) = e^{x-y}\left(x^2 - 2y + 4x + 2\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^{x-y}\left(-x^2 + 2y + 2\right) + 2e^{x-y} = e^{x-y}\left(x^2 - 2y - 2 + 2\right) = e^{x-y}\left(x^2 - 2y\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -e^{x-y}\left(x^2 - 2y + 2x\right) - 2e^{x-y} = e^{x-y}\left(-x^2 + 2y - 2x - 2\right)$$

Запишем достаточное условие экстремума. Точка (x_0, y_0) будет являться точкой экстремума, если $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0,y_0) \times \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)\right)^2 > 0$, и не являться такой $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0,y_0) \times \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)\right)^2 < 0$. Случай $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0,y_0) \times \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)\right)^2 = 0$ требует дальнейшего рассмотрения.

Если точка (x_0, y_0) является точкой экстремума, то если $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$, то точка (x_0, y_0) - тока минимума, а если $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$ - точка максимума

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(1;\frac{3}{2}\right)=e^{1-\frac{3}{2}}\left(1-2*\frac{3}{2}+4*1+2\right)=4e^{-\frac{1}{2}}>0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(1;\frac{3}{2}\right)=e^{1-\frac{3}{2}}\left(1^2-2*\frac{3}{2}\right)=-2e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=e^{1-\frac{3}{2}}\left(-1+2*\frac{3}{2}-2*1-2\right)=-3e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\times\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)^2=4e^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-2e^{-\frac{1}{2}}\right)-\left(-3e^{-\frac{1}{2}}\right)^2=-17e<0$$

Значит, данная точка не является точкой экстремума

Задание 3. Найти условные экстремумы функций
$u = 11x^2 + 6xy + 3y^2$ при $x^2 + y^2 = 10$.

Решение. Составим функцию Лагранжа
$L = 11x^2 + 6xy + 3y^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 - 10\right)$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 22x + 6y + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 6x + 6y + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x + 3y + \lambda x = 0 \\ 3x + 3y + \lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (11+\lambda)x + 3y = 0 \\ 3x + (3+\lambda)y = 0 \\ x^2 + y^2 - 10 = 0 \end{cases}$$

Система двух однородных уравнении имеет только нулевой решение, если определитель системы не равен 0, но нулевое решение не подходит, так как получается, что третье уравнение системы неверно.
Значит, найдем такое значение λ, при котором определитель есть 0

$$\begin{vmatrix} 11+\lambda & 3 \\ 3 & 3+\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow (11+\lambda)(3+\lambda) - 9 = 0$$

$$33 + 11\lambda + 3\lambda + \lambda^2 - 9 = 0 \;\rightarrow \lambda^2 + 14\lambda + 24 = 0$$

$$\lambda = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4*24}}{2} = -7 \pm 5$$

$\lambda = -12; \lambda = -2$

При $\lambda = -12$ получаем

$$\begin{cases} -x + 3y = 0 \\ 3x - 9y = 0 \\ x^2 + y^2 - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y \\ (3y)^2 + y^2 - 10 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 3y \\ y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3, y = 1 \\ x = -3, y = -1 \end{cases}$$

При $\lambda = -2$ получаем

$$\begin{cases} 9x + 3y = 0 \\ 3x + y = 0 \\ x^2 + y^2 - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x \\ x^2 + (-3x)^2 - 10 = 0 \end{cases} \begin{cases} y = -3x \\ x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, y = -3 \\ x = -1, y = 3 \end{cases}$$

Получаем, 4 стационарных точки $(3;1);(-3;-1);(1;-3);(-1;3)$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y) = 22 + 2\lambda; \frac{\partial^2 y}{\partial y^2}(x,y) = 6 + 2\lambda; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x,y) = 6$$

Для точки $(3;1)$, то есть $\lambda = -12$ получаем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(3;1) = 22 - 2*12 = -2 < 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(3;1) = 6 - 2*12 = -18$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(3;1) = 6$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right)^2 = 6*18 - 6^2 > 0$$

Значит, $(3;1)$ - точка условного максимума

Для точки $(-3;-1)$, то есть $\lambda = -12$ получаем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(3;1) = 22 - 2*12 = -2 < 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(3;1) = 6 - 2*12 = -18$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(3;1) = 6$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right)^2 = 6*18 - 6^2 > 0$$

Значит, $(-3;-1)$ - точка условного максимума

Для точки $(1;-3)$, то есть $\lambda = -2$ получаем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(3;1) = 22 - 2*2 = 18 > 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(3;1) = 6 - 2*2 = 4$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(3;1) = 6$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right)^2 = 4*18 - 6^2 > 0$$

Значит, $(1;-3)$ - точка условного минимума

Для точки $(-1;3)$, то есть $\lambda = -2$ получаем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(3;1) = 22 - 2*2 = 18 > 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(3;1) = 6 - 2*2 = 4$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(3;1) = 6$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right)^2 = 4*18 - 6^2 > 0$$

Значит, $(-1;3)$ - точка условного минимума

Задание 4. Исследовать сходимость числового ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(arctg\frac{1}{n}\right)^n$$

Решение.
Применим признак Коши

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\left(arctg\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}arctg\frac{1}{n}$$

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

Рассмотрим величину $\alpha_n=\sqrt[n]{n}-1$, тогда получаем, что

$$n=(1+\alpha_n)^n=1+n\alpha_n+\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2+\ldots>1+\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$$

При этом при $n>2$ получаем, что $\frac{n(n-1)}{2}>\frac{n^2}{4}$, значит, $n>\frac{n^2}{4}\alpha_n^2 \Rightarrow \alpha_n^2<\frac{4}{n}$

Значит, $0<\alpha_n<\frac{2}{\sqrt{n}}$, а при $n\to\infty$ получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1, \lim\limits_{n\to\infty}arctg\frac{1}{n}=0$, поэтому $\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}arctg\frac{1}{n}=0<1$, значит, ряд сходится

Задание 5. Определить область сходимости функционального ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$$

Решение. Применим признак Коши

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\ln^n x\right|} = \left|\ln x\right| < 1 \Rightarrow -1 < \ln x < 1 \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{e}; e\right)$$

Проверим на граничных точках

При $x = \frac{1}{e}$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, который расходится, так как член ряда не стремится к 0.

При $x = e$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, который расходится, так как член ряда не стремится к 0.

Значит, область сходимости функционального ряда $x \in \left(\frac{1}{e}; e\right)$

Задание 6. Найти интервал сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\ln n}$$

Решение. Найдем радиус сходимости

Пусть $a_n=\frac{1}{n\ln n}$, тогда применим формулу для определения радиуса сходимости $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$$R=\underset{n\to\infty}{Lim}\left|\frac{\frac{1}{n\ln n}}{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}\right|=\underset{n\to\infty}{Lim}\left|\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln n}\right|=\underset{n\to\infty}{Lim}\left|\frac{n+1}{n}\frac{\ln(n+1)}{\ln}\right|=1.$$

Значит, интервал сходимости $|x+1|<1\Rightarrow x\in(-2;0)$

Проверим сходимость на концах интервала

При $x=-2$ получаем ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$, а при $x=0$ получаем ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

Рассмотрим сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ по интегральному признаку

$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{a\to+\infty}\int_2^{a}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{a\to+\infty}\int_2^{a}\frac{d\ln x}{\ln x}=\lim_{a\to+\infty}\left[\ln\ln x\right]_2^a=\lim_{a\to+\infty}\left(\ln\ln a-\ln\ln 2\right)=\infty$, значит, ряд расходится

Рассмотрим сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$ по признаку Лейбница

Пусть $a_n=\frac{1}{n\ln n}$, тогда очевидно, что $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ и

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}{\frac{1}{n\ln n}}=\frac{n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)}=\frac{n}{n+1}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}<1\Rightarrow a_{n+1}<a_n$, значит ряд сходится

Значит, область сходимости ряда – интервал $[-2;0)$

Задание 7. Разложить функцию $y=\frac{\pi}{4}-x$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi;\pi)$.

Решение.

Длина полуинтервала $L=\pi$.

Вычислим a_0

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi}{4}x-\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi}{4}$$

Вычислим a_n

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\frac{\pi nx}{\pi}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\pi}x\right)\cos\frac{\pi nx}{\pi}dx=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{\pi}\right)\cos\frac{\pi nx}{\pi}dx=\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nxdx=...$$

$$\int x\cos nx=\left|\begin{matrix}u=x & du=dx\\ dv=\cos nxdx & v=\dfrac{\sin nx}{n}\end{matrix}\right|=x\frac{\sin nx}{n}-\frac{1}{n}\int\sin nxdx=x\frac{\sin nx}{n}+\frac{1}{n^2}\cos nx$$

$$....=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin nx}{n}+\frac{1}{n^2}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{\sin\pi n}{2n}=0$$

Вычислим b_n

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\frac{\pi nx}{\pi}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\pi}x\right)\sin\frac{\pi nx}{\pi}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{\pi}\right)\sin\frac{\pi nx}{\pi}dx=$$

$$\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nxdx=...$$

$$\int x\sin nx=\left|\begin{matrix}u=x & du=dx\\ dv=\sin nxdx & v=-\dfrac{\cos nx}{n}\end{matrix}\right|=-x\frac{\cos nx}{n}+\frac{1}{n}\int\cos nxdx=-x\frac{\cos nx}{n}+\frac{1}{n^2}\sin nx$$

$$....=\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}+\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{2}{\pi}\frac{-\sin\pi n+\pi n\cos\pi n}{n^2}=2\frac{\cos\pi n}{n}=2\frac{(-1)^n}{n}$$

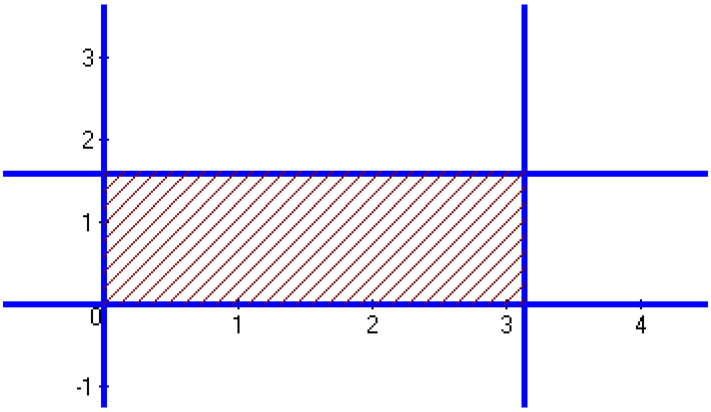
Значит,

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{(-1)^n}{n}\sin nx$$

Задание 8. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D x\sin(x+y)dxdy, D: 0 \le x \le \pi; 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$$

Решение. Сделаем чертеж области.



$$\iint_D x\sin(x+y)dxdy = \int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x+y)\,dxdy = \int_0^{\pi}\left[-x\cos(x+y)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} dx =$$

$$= \int_0^{\pi}\left[-x\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+x\cos(x+0)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \int_0^{\pi}(x\sin x + x\cos x)\,dx$$

Вычислим интегралы $\int x\cos x dx, \int x\sin x dx$

$$\int x\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{vmatrix} = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x$$

$$\int x\sin x dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{vmatrix} = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x$$

Тогда, получаем

$$\iint_D x\sin(x+y)dxdy = \int_0^{\pi}(x\sin x + x\cos x)\,dx =$$

$$= \left[x\sin x + \cos x - x\cos x + \sin x\right]_0^{\pi} = \left[\pi\sin\pi + \cos\pi - \pi\cos\pi + \sin\pi\right] - \left[0\sin 0 + \cos 0 - 0\cos 0 + \sin 0\right] =$$

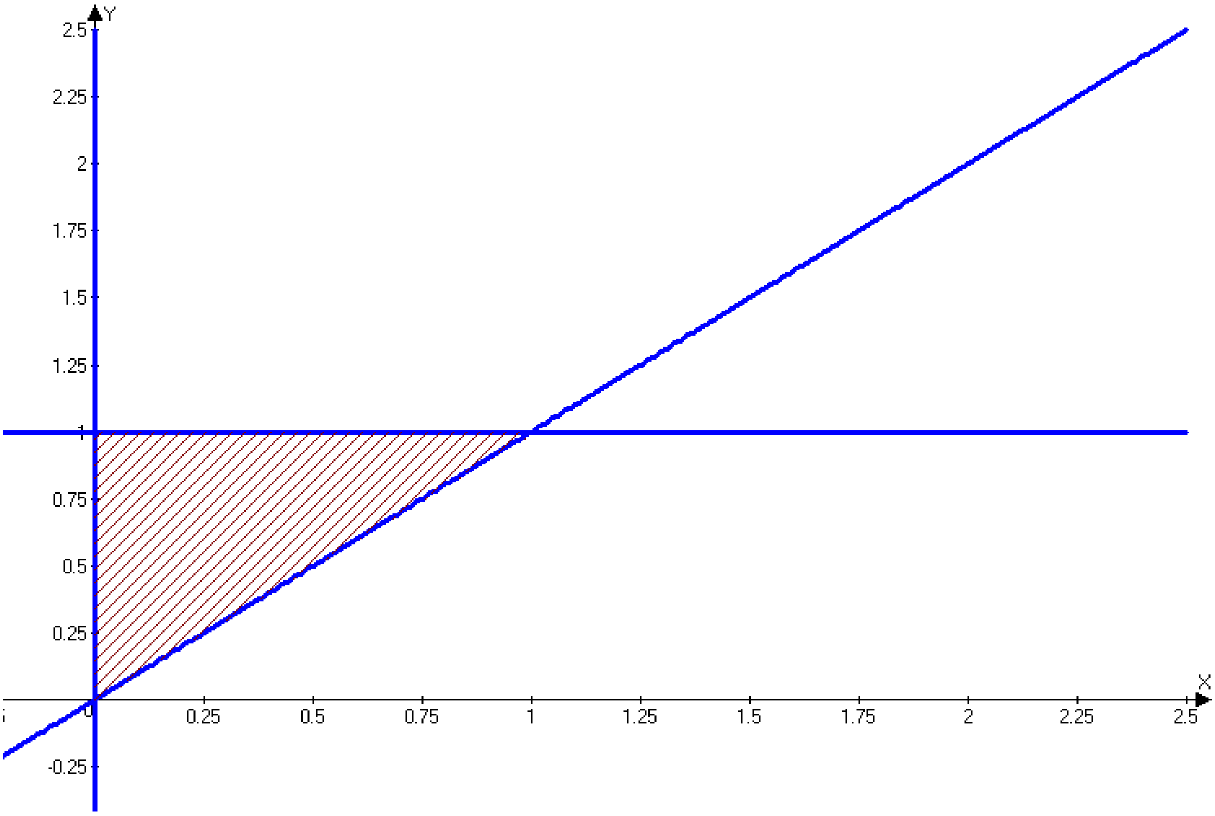
$$= \pi - 2$$

Задание 9. Вычислить многократный интервал:

$$\iiint\limits_{\Omega} 2y^2 e^{xy}\,dxdydz$$

Ω ограничена плоскостями $x=0, y=1, y=x, z=0, z=1$

Решение. Изобразим проекцию тела на плоскость OXY



Тогда, получаем

$$\iiint\limits_{\Omega} 2y^2 e^{xy}\,dxdydz = \int_0^1\int_0^y\int_0^1 2y^2 e^{xy}\,dydxdz = \int_0^1\int_0^y 2y^2 e^{xy}\,dydx = \int_0^1 \left[\frac{2y^2 e^{xy}}{y}\right]_0^y dy$$

$$= \int_0^1 \left[2ye^{y^2} - 2y\right]dy = \left[e^{y^2} - y^2\right]_0^1 = \left[e^{1^2} - 1^2\right] - \left[e^{0^2} - 0^2\right] = e - 2$$

Задание 10. Используя формулу Грина, вычислить интеграл:

$$\oint_L x^3 dy - y dx, L: x^2 + y^2 = 4$$

Решение. $\oint_L x^3 dy - y dx = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} x^3 - \frac{\partial}{\partial y}(-y) \right) = \iint_D \left(3x^2 + 1\right)$

Перейдем к полярным координатам

$x = 2r\cos a$

$y = 2r\sin a$

$I = 2r$

Тогда,

$$\iint_D \left(3x^2+1\right) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(3*(2r\cos a)^3 + 1\right) 2r da dr = 2\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(24r^4 \cos^3 a + r\right) da dr =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \left(\frac{24}{5} r^5 \cos^3 a + \frac{r^2}{2} \right)_0^1 da = 2\int_0^{2\pi} \left(\frac{24}{5} \cos^3 a + \frac{1}{2} \right) da = 2\int_0^{2\pi} \left(\frac{24}{5} \left(\frac{\cos 3a}{4} - \frac{3}{4}\cos a \right) + \frac{1}{2} \right) da =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \left(\frac{6}{5}\cos 3a - \frac{18}{5}\cos a + \frac{1}{2} \right) da = 2\left[\frac{2}{5}\sin 3a - \frac{18}{5}\sin a + \frac{1}{2} a \right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

При решении воспользовались формулой

$$\cos^3 a = \frac{\cos 3a}{4} - \frac{3\cos a}{4}$$