

## Билет

**ВАРИАНТ №2**

№1. Построить таблицу функции, которая представлена формулой

$$U = ((x|y) \oplus (y|\bar{z})) \cdot (x \rightarrow (y \rightarrow z)).$$

№2. Для функции в задаче №1 построить СДНФ, СКНФ.

№3. Доказать эквивалентность формул с использованием эквивалентных преобразований

$$U = (x \oplus y) \cdot (x \vee (y \rightarrow z)), \quad B = (x|y) \cdot (z \vee (y \rightarrow x)) \cdot (\bar{y} \rightarrow x).$$

№4. Найти сокращенную ДНФ с помощью карты Карно для функции  $f(\bar{x}^4) = (1111 \ 0101 \ 1010 \ 1110)$ .

## Ход решения

**Задача 1.** Построить таблицу функции, которая представлена формулой

$$U = ((x|y) \oplus (y|\bar{z})) \cdot (x \rightarrow (y \rightarrow z)).$$

**Решение.** Строим таблицу, вычисляя согласно скобкам подформулы, получим:

x	y	z	$x y$	$\bar{z}$	$y \bar{z}$	$(x y) \oplus (y \bar{z})$
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1

x	y	z	$y \rightarrow z$	$x \rightarrow (y \rightarrow z)$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1

1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Окончательно получаем таблицу функции:

x	y	z	$U = ((x y) \oplus (y \bar{z})) \cdot (x \rightarrow (y \rightarrow z))$
0	0	0	<b>0</b>
0	0	1	<b>0</b>
0	1	0	<b>1</b>
0	1	1	<b>0</b>
1	0	0	<b>0</b>
1	0	1	<b>0</b>
1	1	0	<b>0</b>
1	1	1	<b>1</b>

**Задача 2.** Для функции в задаче №1 построить СДНФ и СКНФ.

**Решение.** Приведем таблицу истинности этой функции (найдена в примере №1).

x	y	z	U
0	0	0	<b>0</b>
0	0	1	<b>0</b>
0	1	0	<b>1</b>
0	1	1	<b>0</b>
1	0	0	<b>0</b>
1	0	1	<b>0</b>
1	1	0	<b>0</b>
1	1	1	<b>1</b>

У этой функции два единичных набора: (0,1,0) и (1,1,1). Для каждого из этих наборов составляем конъюнкцию переменных:

$$(0,1,0) \rightarrow \bar{x} y \bar{z}$$

$$(1,1,1) \rightarrow xyz$$

Тогда СДНФ равна дизъюнкции этих конъюнкций  $U = \bar{x} y \bar{z} \vee xyz$ .

Аналогично найдем СКНФ. Выпишем все нулевые наборы функции и соответствующие им дизъюнкции:

$$(0,0,0) \rightarrow (x \vee y \vee z); (0,0,1) \rightarrow (x \vee y \vee \bar{z});$$

$$(0,1,1) \rightarrow (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}); (1,0,0) \rightarrow (\bar{x} \vee y \vee z);$$

$$(1,0,1) \rightarrow (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}); (1,1,0) \rightarrow (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z).$$

Тогда СКНФ есть конъюнкция всех этих дизъюнкций:

$$U = (x \vee y \vee z) \& (x \vee y \vee \bar{z}) \& (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \vee y \vee z) \& (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z).$$

**Задача 3.** Доказать эквивалентность формул с использованием эквивалентных преобразований

$$U = (x \oplus y) \cdot (x \vee (y \rightarrow z)), B = (x | y) \cdot (z \vee (y \rightarrow x)) \cdot (\bar{y} \rightarrow x).$$

**Решение.**

Преобразуем первую функцию. Используем формулы:  $x \oplus y = x\bar{y} \vee \bar{x}y$ ,  
 $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$ . Получим:

$$U = (x \oplus y) \cdot (x \vee (y \rightarrow z)) = (x\bar{y} \vee \bar{x}y) \cdot (x \vee (\bar{y} \vee z)) = (x\bar{y} \vee \bar{x}y) \cdot (x \vee \bar{y} \vee z) =$$

Раскрываем скобки и упрощаем:

$$\begin{aligned} &= (x\bar{y} \cdot (x \vee \bar{y} \vee z) \vee \bar{x}y \cdot (x \vee \bar{y} \vee z)) = \\ &= (x\bar{y}x \vee x\bar{y}\bar{y} \vee x\bar{y}z) \vee (\bar{x}yx \vee \bar{x}y\bar{y} \vee \bar{x}yz) = (x\bar{y} \vee x\bar{y} \vee x\bar{y}z) \vee (\bar{x}y \vee \bar{x}y \vee \bar{x}yz) = \\ &= x\bar{y} \vee x\bar{y} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}y \vee \bar{x}y \vee \bar{x}yz = x\bar{y}(1 \vee 1 \vee z) \vee \bar{x}y(1 \vee 1 \vee z) = x\bar{y} \vee \bar{x}yz. \end{aligned}$$

Аналогично преобразуем вторую функцию. Используем формулы:

$x | y = \bar{x}y = \bar{x} \vee \bar{y}$ ,  $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$ . Получим:

$$\begin{aligned} B &= (x | y) \cdot (z \vee (y \rightarrow x)) \cdot (\bar{y} \rightarrow x) = (\bar{x} \vee \bar{y}) \cdot (z \vee (\bar{y} \vee x)) \cdot (\bar{y} \vee x) = \\ &= (\bar{x} \vee \bar{y}) \cdot (z \vee \bar{y} \vee x) \cdot (y \vee x) = (\bar{x} \cdot (y \vee x) \vee \bar{y} \cdot (y \vee x)) \cdot (z \vee \bar{y} \vee x) = \\ &= ((\bar{x}y \vee \bar{x}x) \vee (\bar{y}y \vee \bar{y}x)) \cdot (z \vee \bar{y} \vee x) = (\bar{x}y \vee 0 \vee 0 \vee \bar{y}x) \cdot (z \vee \bar{y} \vee x) = \\ &= (\bar{x}y \vee \bar{y}x) \cdot (x \vee \bar{y} \vee z) = \left| \begin{array}{l} \text{получили выражение как для} \\ \text{функции } U, \text{ повторяем выкладки} \end{array} \right| = x\bar{y} \vee \bar{x}yz \end{aligned}$$

Формулы эквивалентны.

**Задача 4.** Найти сокращенную ДНФ с помощью карты Карно для функции

$$f(\bar{x}^4) = (1111 \quad 0101 \quad 1010 \quad 1110).$$

**Решение.** Составим для наглядности сначала таблицу истинности:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$f$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Теперь по единичным наборам заполняем карту Карно:

$x_1x_2 \setminus x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1	1	
11	1	1		1
10	1			1

Выделяем максимальные прямоугольники из единиц, пока не покроем все единицы.

Первое покрытие:  $\overline{x_1}x_4$

$x_1x_2 \setminus x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1	1	
11	1	1		1
10	1			1

Второе покрытие:  $x_1\overline{x_4}$

$x_1x_2 \setminus x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1	1	

<b>11</b>	1	1		1
<b>10</b>	1			1

Третье покрытие:  $\overline{x_1} \overline{x_2}$

$x_1 x_2 \setminus x_3 x_4$	<b>00</b>	<b>01</b>	<b>11</b>	<b>10</b>
<b>00</b>	1	1	1	1
<b>01</b>		1	1	
<b>11</b>	1	1		1
<b>10</b>	1			1

Четвертое покрытие (осталась одна единица непокрытая к этому моменту):  $x_2 \overline{x_3} x_4$  ИЛИ  $x_1 x_2 \overline{x_3}$

$x_1 x_2 \setminus x_3 x_4$	<b>00</b>	<b>01</b>	<b>11</b>	<b>10</b>
<b>00</b>	1	1	1	1
<b>01</b>		1	1	
<b>11</b>	1	1		1
<b>10</b>	1			1

Получаем сокращенную ДНФ:  $\overline{x_1} x_4 \vee x_1 \overline{x_4} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \vee x_2 \overline{x_3} x_4 \vee x_1 x_2 \overline{x_3}$ .