$y''-6y'+8y=0,\ y(0)=2, y'(0)=-4$

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение:

$k^2-6k+8=0,$

$k_1=2,\ k_2=4.$

Тогда общее решение имеет вид:

$y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}.$

Найдем постоянные C_1,C_2 из начальных условий:

$y(0)=2;\ y'(0)=-4.$ Сначала найдем производную решения: $y'(x)=2C_1e^{2x}+4C_2e^{4x}.$

Подставляем:

$$\begin{cases} y(0)=C_1+C_2=2, \\ y'(0)=2C_1+4C_2=-4; \end{cases} \begin{cases} 2C_1+2C_2=4, \\ 2C_1+4C_2=-4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2C_2=-8, \\ C_1+C_2=2. \end{cases} \begin{cases} C_2=-4, \\ C_1=6. \end{cases}$$

Получаем частное решение: $y(x)=6e^{2x}-4e^{4x}$

Ответ: $y(x)=6e^{2x}-4e^{4x}$

$y''-7y'+10y=2e^{3x}$

Решение. Это линейное неоднородное уравнение второго порядка. Сначала решаем соответствующее однородное уравнение $y''-7y'+10y=0$. Составим и решим характеристическое уравнение:

$k^2-7k+10=0,$

$D=49-40=9,$

$$k_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{9}}{2}=5;2.$$

Получаем общее решение однородного уравнения (для двух различных корней характеристического уравнения)

$y_{o.o.}=C_1e^{5x}+C_2e^{2x}.$

Найдем частное решение неоднородного уравнения по виду правой части: $y_{ч.н.}=Ae^{3x}$. Находим производные:

$y_{ч.н.}'=3Ae^{3x},\ y_{ч.н.}''=9Ae^{3x}.$

Подставляем:

$9Ae^{3x} - 7\cdot 3Ae^{3x} + 10\cdot Ae^{3x} = 2e^{3x}$,

$(9-21+10)A = 2$,

$-2A = 2$,

$A = -1$.

Получаем $y_{ч.н.} = -e^{3x}$.

Тогда общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид:

$y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.} = C_1e^{5x} + C_2e^{2x} - e^{3x}$.

Ответ: $y(x) = C_1e^{5x} + C_2e^{2x} - e^{3x}$