МИРЭА. Типовой расчет по теории вероятностей с решением

Вариант 1

Часть 1. Случайные события

Задача 1.1. В магазине 20 калькуляторов трех разных производителей: А, В и С, причем производства компании А – 7 шт., В – 8 шт., и С – 5 шт. Наугад куплено пять калькуляторов. Найти вероятность того, что: а) все купленные калькуляторы произведены компаниями А или В, б) среди купленных хотя бы два произведены компанией С.

Решение. Используем классическую формулу вероятности: $P=\frac{m}{n}$, где *m* – число исходов, благоприятствующих осуществлению события, а *n* – число всех равновозможных элементарных исходов.

$n=C_{20}^{5}=\frac{20!}{5!15!}=\frac{16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=15504$ - число различных способов выбрать любые 5 калькуляторов для покупки.

Событие A = (Все купленные калькуляторы произведены компаниями А или В). Найдем число благоприятствующих исходов $m(A)=C_{15}^{5}=\frac{15!}{5!10!}=\frac{11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=3003$ - число различных способов выбрать любые 5 калькуляторов из произведенных компаниями А или В из 7+8=15 штук.

$$P(A)=\frac{m(A)}{n}=\frac{3003}{15504}\approx 0{,}194.$$

Событие B = (Среди купленных хотя бы два произведены компанией С). Рассмотрим противоположное событие $\overline{B}$ =(Среди купленных только 0 или 1 калькулятор произведен компанией С). Найдем число благоприятствующих исходов $m\left(\overline{B}\right)=C_{15}^{5}+C_{15}^{4}\cdot C_{5}^{1}=3003+\frac{15!}{4!11!}\cdot 5=3003+\frac{12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 5=9828$ - число различных способов выбрать любые 5 калькуляторов из произведенных компаниями А или В, или 4 калькулятора, произведенные компаниями А или В и 1, произведенный компанией С.

$$P\left(B\right)=1-P\left(\overline{B}\right)=1-\frac{m\left(\overline{B}\right)}{n}=1-\frac{9828}{15504}\approx 0,366.$$

Ответ: 0,194, 0,366.

Задача 1.2. В правильный треугольник наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в треугольник круга.

Решение. Используем геометрическое определение вероятности, согласно которому искомая вероятность (вероятность того, что точка, поставленная наудачу внутри треугольника, окажется в круге) равна $P=\frac{S_{круга}}{S_{треуг.}}$.

Пусть r - радиус вписанного круга. Тогда площадь круга $S_{круга}=\pi r^2$. Площадь треугольника равна $S_{треуг.}=3\sqrt{3}r^2$.

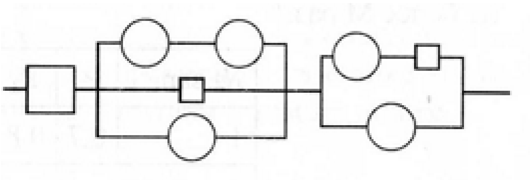
Искомая вероятность $P=\frac{S_{круга}}{S_{треуг.}}=\frac{\pi r^2}{3\sqrt{3}r^2}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\approx 0,605$.

Ответ: 0,605.

Задача 1.3. Надежность схемы – вероятность ее работы за время t.

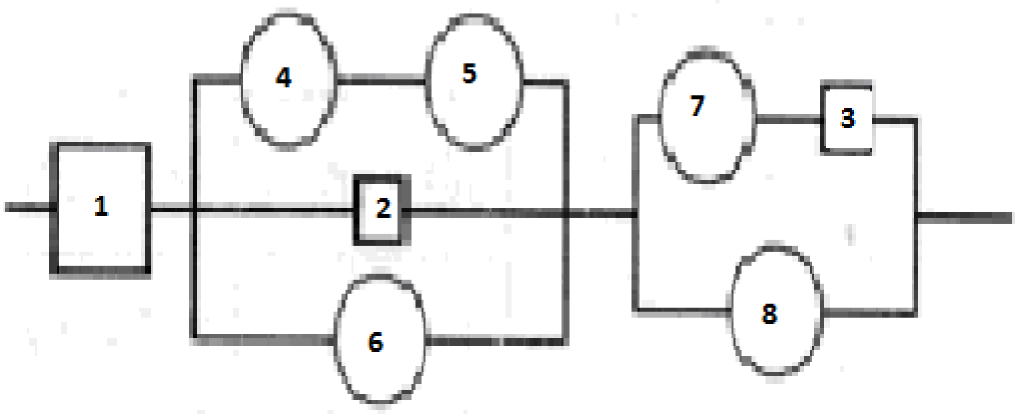
p - надежность элемента, q - вероятность отказа элемента.

Элементы выходят из строя независимо друг от друга.



$q○= 0,1,\ q□= 0,2$. Найти надежность схемы.

Решение. Пронумеруем все элементы схемы:



Введем независимые события:

A_i = (Элемент i работает исправно), $i = 1,...,7$

Тогда $\overline{A_i}$ = (Элемент i отказал), $P(\overline{A_i})=1-P(A_i)$, $i=1,...,7.$

По условию известно, что:

$$P(\overline{A_1})=P(\overline{A_2})=P(\overline{A_3})=0,1,\ P(\overline{A_4})=P(\overline{A_5})=P(\overline{A_6})=P(\overline{A_7})=P(\overline{A_8})=0,2.$$

Тогда:

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=0,9,\ P(A_4)=P(A_5)=P(A_6)=P(A_7)=P(A_8)=0,8.$$

Введем событие X = (Схема работает исправно). Выразим событие X через события A_i и $\overline{A_i}$. Учитываем, что последовательному соединению отвечает произведение событий, а параллельному – сумма событий.

Тогда $X = A_1\cdot\left(A_4\cdot A_5+A_2+A_6\right)\cdot\left(A_8+A_3\cdot A_7\right)$. Тогда вероятность события X (надежность схемы) равна

$$\begin{aligned}
&P\left(X\right)=P\left(A_1\cdot\left(A_4\cdot A_5+A_2+A_6\right)\cdot\left(A_8+A_3\cdot A_7\right)\right)=\\
&=P\left(A_1\right)\cdot P\left(A_4\cdot A_5+A_2+A_6\right)\cdot P\left(A_8+A_3\cdot A_7\right)=\\
&=P\left(A_1\right)\cdot\left(1-P\left(\overline{A_2}\right)P\left(\overline{A_6}\right)P\left(\overline{A_4\cdot A_5}\right)\right)\cdot\left(1-P\left(\overline{A_3\cdot A_7}\right)P\left(\overline{A_8}\right)\right)=\\
&=P\left(A_1\right)\cdot\left(1-P\left(\overline{A_2}\right)P\left(\overline{A_6}\right)\left(1-P\left(A_4\right)\cdot P\left(A_5\right)\right)\right)\cdot\left(1-\left(1-P\left(A_3\right)\cdot P\left(A_7\right)\right)P\left(\overline{A_8}\right)\right).
\end{aligned}$$

Подставляем числовые значения:

$$P\left(X\right)=0,9\cdot\left(1-0,1\cdot 0,2\left(1-0,8^2\right)\right)\cdot\left(1-\left(1-0,9\cdot 0,8\right)\cdot 0,2\right)\approx 0,843.$$

Мы использовали формулу для независимых в совокупности событий $A_1,...A_n$:

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=1-P(\overline{A_1+A_2+...+A_n})=1-P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot...\cdot\overline{A_n})=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot...\cdot P(\overline{A_n})$$

Ответ: надежность схемы 84,3%.

Задача 1.4. В первой урне лежат 5 белых, 11 черных и 8 красных шаров, во второй урне – 10 белых, 8 черных и 6 красных, в третьей 2 белых, 7 черных и 3 красных. Из каждой урны наугад вынимают по одному шару. Какова вероятность того, что: а) все вынутые шары окажутся одного цвета; б) ровно два шара окажутся красными?

Решение. Введем вспомогательные события:

X_i = (Из i-ой урны извлечен белый шар), $i=1,2,3$.

Y_i = (Из i-ой урны извлечен черный шар), $i=1,2,3$.

Z_i = (Из i-ой урны извлечен красный шар), $i=1,2,3$.

Найдем вероятности этих событий по классическому определению вероятности:

$$P(X_1)=\frac{5}{24}, P(Y_1)=\frac{11}{24}, P(Z_1)=\frac{8}{24};$$
$$P(X_2)=\frac{10}{24}, P(Y_2)=\frac{8}{24}, P(Z_2)=\frac{6}{24};$$
$$P(X_3)=\frac{2}{12}, P(Y_3)=\frac{7}{12}, P(Z_3)=\frac{3}{12}.$$

Введем событие X = (Выбранные шары будут одного цвета). Это событие можно представить как сумму несовместных событий: $X = A1 + A2 + A3$, где

$A1$ = (Выбранные шары будут белого цвета),

$A2$ = (Выбранные шары будут черного цвета),

$A3$ = (Выбранные шары будут красного цвета).

$$A1 = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 = \frac{5}{24}\cdot\frac{10}{24}\cdot\frac{2}{12} = \frac{25}{1728},$$

$$A2 = Y_1 \cdot Y_2 \cdot Y_3 = \frac{11}{24}\cdot\frac{8}{24}\cdot\frac{7}{12} = \frac{77}{864},$$

$A3 = Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 = \frac{8}{24} \cdot \frac{6}{24} \cdot \frac{3}{12} = \frac{1}{48}$.

Тогда $P(X) = \frac{25}{1728} + \frac{77}{864} + \frac{1}{48} = \frac{215}{1728} \approx 0{,}124$.

Введем событие Q = (Ровно два шара окажутся красными). Если обозначить $p_i = P(Z_i), i = 1,2,3$ - вероятность вынуть красный шар из i-ой урны, то искомую вероятность можно выразить как:

$$P(Q) = p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3 = \frac{8}{24} \cdot \frac{6}{24} \cdot \frac{12-3}{12} + \frac{8}{24} \cdot \frac{24-6}{24} \cdot \frac{3}{12} + \frac{24-8}{24} \cdot \frac{6}{24} \cdot \frac{3}{12} \approx 0{,}167.$$

Ответ: 0,124; 0,167.

Задача 1.5. Рабочий обслуживает три станка, на которых обрабатываются одинотипные болты. Вероятность брака для первого станка равна 0,02, для второго – 0,01, для третьего – 0,03. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительности станков относятся как 5:3:2.

А) найти вероятность того, что взятая наугад деталь будет бракованная,

Б) взятая наугад деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что деталь изготовлена на втором станке.

Решение. Введем полную группу гипотез

$H1$ = (Деталь изготовлена на первом станке),
$H2$ = (Деталь изготовлена на втором станке),
$H3$ = (Деталь изготовлена на третьем станке).
Найдем вероятности гипотез, используя данные о производительности станков.

Пусть производительность первого станка равна $5x$, тогда производительность второго станка равна $3x$, а третьего $2x$. Тогда

$$P(H1)=\frac{5x}{5x+3x+2x}=\frac{5}{10}=0,5,$$

$$P(H2)=\frac{3x}{5x+3x+2x}=\frac{3}{10}=0,3,$$

$$P(H3)=\frac{2x}{5x+3x+2x}=\frac{2}{10}=0,2.$$

Введем событие A = (Деталь бракованная). По условию даны вероятности $P(A|H1)=0,02$, $P(A|H2)=0,01$, $P(A|H3)=0,03$.

А) Вероятность события A найдем по формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(A|H1)P(H1)+P(A|H2)P(H2)+P(A|H3)P(H3)=$$
$$=0,5\cdot 0,02+0,3\cdot 0,01+0,2\cdot 0,03=0,019.$$

Б) Найдем вероятность того, что деталь изготовлена на втором станке, если она оказалась бракованной, по формуле Баейса:

$$P(H2|A)=\frac{P(A|H2)P(H2)}{P(A)}=\frac{0,3\cdot 0,01}{0,019}\approx 0,158$$

Ответ: 0,019; 0,158.

Задача 1.6.

По каждому варианту выполняются задачи а), в) и с), одна из которых решается с помощью формулы Бернулли, другая – по формуле Пуассона, а третья по теореме Муавра-Лапласа. Каждая задача включает в себя два подпункта.

Устройство состоит из n элементов с одинаковой надежностью p. (надежность элемента – вероятность его работы за время t). Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что за время t:

1) выйдет из строя m элементов,
2) выйдет из строя более двух элементов.

Вар.	1a	1b	1c	11a	11b	11c
n	12	50	500	1000	8	80
m	4	10	6	4	3	20
P	0,8	0,7	0,99	0,997	0,6	0,8

Решение.

А) $n=1000, m=4, P=0,997$

Имеем схему Бернулли с параметрами $n=1000$ (число элементов), $p=0,003$ (вероятность выхода элемента за время t из строя). Так как n велико, а p мало, можно использовать для вычислений приближенную формулу Пуассона:

$P_n(k)=\frac{(np)^k}{k!}e^{-np}$, где $np=1000\cdot 0,003=3$, получаем формулу $P_{1000}(k)=\frac{3^k}{k!}e^{-3}$ - вероятность, что ровно k элементов выйдут из строя.

Вероятность того, что выйдут из строя 4 элемента: $P_{1000}\left(k=4\right)=\frac{3^4}{4!}e^{-3}\approx 0,168.$

Вероятность того, что выйдут из строя более 2 элементов:

$$P_{1000}(k>2)=1-P_{1000}(k\le 2)=1-P_{1000}(0)-P_{1000}(1)-P_{1000}(2)=$$
$$=1-\frac{3^0}{0!}e^{-3}-\frac{3^1}{1!}e^{-3}-\frac{3^2}{2!}e^{-3}=1-\left(1+3+\frac{9}{2}\right)e^{-3}\approx 0,577.$$

Б) $n=8, m=3, P=0,6$.

Имеем схему Бернулли с параметрами $n=8$ (число элементов), $p=0,4$ (вероятность выхода элемента за время t из строя). Используем формулу Бернулли:

$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}=C_8^k\cdot 0,4^k\cdot 0,6^{8-k}$ - вероятность, что ровно k элементов выйдут из строя.

Вероятность того, что выйдут из строя 3 элемента:

$$P_8(3)=C_8^3\cdot 0,4^3\cdot 0,6^5=\frac{8!}{3!5!}\cdot 0,4^3\cdot 0,6^5=\frac{6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 0,4^3\cdot 0,6^5\approx 0,279.$$

Вероятность того, что выйдут из строя более 2 элементов:

$$P_8(k>2)=1-P_8(k\le 2)=1-P_8(0)-P_8(1)-P_8(2)=$$
$$=1-C_8^0\cdot 0,4^0\cdot 0,6^8-C_8^1\cdot 0,4^1\cdot 0,6^7-C_8^2\cdot 0,4^2\cdot 0,6^6=$$
$$=1-0,6^8-8\cdot 0,4\cdot 0,6^7-\frac{7\cdot 8}{1\cdot 2}\cdot 0,4^2\cdot 0,6^6\approx 0,685.$$

С) $n=80, m=20, P=0,8$

Имеем схему Бернулли с параметрами $n=80$ (число элементов), $p=0,2$ (вероятность выхода элемента за время t из строя).

Вероятность того, что выйдут из строя 20 элементов. Используем локальную теорему Лапласа: $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)$, где $k=20$, значения функции $\varphi(x)$ берутся из таблицы. Подставляем:

$$P_{80}(20) \approx \frac{1}{\sqrt{80 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \varphi\left(\frac{20-80 \cdot 0,2}{\sqrt{80 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}\right) = 0,28 \cdot \varphi(1,118) = 0,28 \cdot 0,214 \approx 0,06.$$

Вероятность того, что выйдут из строя более 2 элементов. Будем использовать интегральную формулу Муавра-Лапласа: $P_n(m1, m2) \approx \Phi\left(\frac{m2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m1-np}{\sqrt{npq}}\right)$, где $m1=3$, $m2=80$, Φ – нормированная функция Лапласа (значения берутся из таблиц).

$$P_{80}(3,80) \approx \Phi\left(\frac{80-80 \cdot 0,2}{\sqrt{80 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}\right) - \Phi\left(\frac{3-80 \cdot 0,2}{\sqrt{80 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}\right) = \Phi(17,89) - \Phi(-3,63) =$$
$$= \Phi(17,89) + \Phi(3,63) = 0,5 + 0,4999 = 0,9999.$$