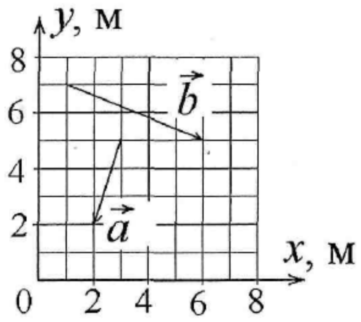
Готовая контрольная по высшей математике ТулГУ

1. Найти модуль разности векторов |**a** – **b**| и косинус угла □ между векторами **a** и **b**.

Ответ округлить до двух значащих цифр.



Решение.

По рисунку определяем координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$\vec{a}=\{-1;-3\},\ \ \vec{b}=\{5;-2\}.$

Найдём разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$\vec{a}-\vec{b}=\{-1;-3\}-\{5;-2\}=\{(-1)-5;\ (-3)-(-2)\}=\{-6;-1\}.$

Вычислим модуль разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=|\{-6;-1\}|=\sqrt{(-6)^2+(-1)^2}=\sqrt{36+1}=\sqrt{37}\approx 6{,}1.$

Найдём скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y=(-1)\cdot 5+(-3)\cdot(-2)=-5+6=1.$

Найдём модули векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$\vec{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$;

$\vec{b} = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$.

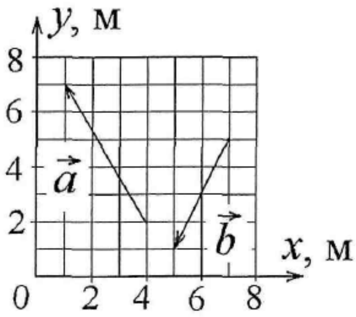
Вычислим косинус угла α между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{29}} = \frac{1}{\sqrt{290}} \approx 0{,}059.$$

Ответ: $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{37} \approx 6{,}1$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{290}} \approx 0{,}059$.

2. Найти модуль суммы векторов |**a** + **b**| и модуль векторного произведения |[**a**x**b**]|.

Ответ округлить до двух значащих цифр.



Решение.

По рисунку определяем координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$\vec{a} = \{-3; 5\}, \quad \vec{b} = \{-2; -4\}.$

Найдём сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$\vec{a} + \vec{b} = \{-3; 5\} + \{-2; -4\} = \{(-3) + (-2);\ 5 + (-4)\} = \{-5; 1\}.$

Вычислим модуль суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\{-5; 1\}\right| = \sqrt{(-5)^2 + 1^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26} \approx 5{,}1.$

Найдём модуль векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$\left|\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]\right| = \left|a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x\right| = \left|(-3) \cdot (-4) - 5 \cdot (-2)\right| = \left|12 + 10\right| = 22.$

Ответ: $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{26} \approx 5{,}1$, $\left|\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]\right| = 22$.

3. Найти значение производной от функции

$$f(x) = \ln(\sin x) + \sin(\ln x)$$

в точке с координатой x = 1.

Решение.

Найдём производную заданной функции, используя правила дифференцирования и таблицу производных:

$$f'(x) = \left(\ln(\sin x) + \sin(\ln x)\right)' = \left(\ln(\sin x)\right)' + \left(\sin(\ln x)\right)';$$

$$\left(\ln(\sin x)\right)' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x;$$

$$\left(\sin(\ln x)\right)' = \cos(\ln x) \cdot (\ln x)' = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos(\ln x)}{x};$$

$$f'(x) = \operatorname{ctg} x + \frac{\cos(\ln x)}{x}.$$

Вычислим значение производной в точке $x = 1$:

$$f'(1) = \operatorname{ctg} 1 + \frac{\cos(\ln 1)}{1} = \operatorname{ctg} 1 + \cos 0 = \operatorname{ctg} 1 + 1 \approx 1{,}64.$$

Ответ: $f'(1) = \operatorname{ctg} 1 + 1 \approx 1{,}64$.

4. Найти частные производные z`$_x$ и z`$_y$ функции

$$z = e^{xy}.$$

Решение.

Частную производную по x найдём, считая переменную y постоянной:

$$z'_x = \left(e^{xy}\right)'_x = e^{xy} \cdot (xy)'_x = e^{xy} \cdot y = ye^{xy}.$$

Частную производную по y найдём, считая переменную x постоянной:

$$z'_y = \left(e^{xy}\right)'_y = e^{xy} \cdot (xy)'_y = e^{xy} \cdot x = xe^{xy}.$$

Ответ: $z'_x = ye^{xy}$, $z'_y = xe^{xy}$.

5. Найти градиент функции u = f(x,y,z) в точке M.

$u = x + \ln(z^2 + y^2)$, $M(2; 1; 1)$.

Решение.

Вектор-градиент скалярного поля u = f(x,y,z) равен:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\vec{k}\ .$$

Найдём значения частных производных функции в точке M:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(x + \ln\left(z^2 + y^2\right)\right)'_x = 1 + 0 = 1, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 1;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(x + \ln\left(z^2 + y^2\right)\right)'_y = 0 + \frac{1}{z^2 + y^2}\cdot(0 + 2y) = \frac{2y}{z^2 + y^2}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = \frac{2\cdot 1}{1^2 + 1^2} = \frac{2}{2} = 1;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(x + \ln\left(z^2 + y^2\right)\right)'_x = 0 + \frac{1}{z^2 + y^2}\cdot(2z + 0) = \frac{2z}{z^2 + y^2}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = \frac{2\cdot 1}{1^2 + 1^2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Запишем градиент скалярного поля u в точке M:

$$\left.\operatorname{grad} u\right|_M = 1\cdot\vec{i} + 1\cdot\vec{j} + 1\cdot\vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\ .$$

Ответ: $\left.\operatorname{grad} u\right|_M = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.